Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 517.512.6 МАТЕМАТИКА

В. В. ЖУК

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 30 VI 1970)

В заметке устанавливаются некоторые точные соотношения между наилучшими приближениями и модулями непрерывности, аналогичные известным неравенствам Ж. Адамара — Г. Е. Шилова для норм самой функции и ее производных. Полученные результаты соприкасаются с вопросом о точных постоянных в теореме Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций.

1. Примем следующие обозначения. $\tilde{C}$ — пространство вещественных, непрерывных, 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in(-\infty,\infty)} |f(x)|$. Пусть $r \geqslant 0$ — целое число. Тогда $\tilde{C}^{(r)}$ обозначает множество функций $f \in \tilde{C}$, у которых r-я производная $f^{(r)}$ $(f^{(0)} = f)$ принадлежит $\tilde{C}$. Пусть $f \in \tilde{C}$, k — натуральное число, $h \geqslant 0$. Положим

$$\omega_k(h, f) = \sup_{|t|\leqslant h} \left\| \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} f(x + pt) \right\|.$$

Функция $\omega_k(h, f)$ называется модулем непрерывности порядка k функции f. Полагаем $E_n(f) = \min\|f - T_n\|$, где минимум берется по всем тригонометрическим полиномам порядка не выше n. $\mathrm{Lip}(\alpha, M, k)$ — множество функций $f \in \tilde{C}$, удовлетворяющих при любом $h \geqslant 0$ условию $\omega_k(h, f) \leqslant Mh^\alpha$. Символ $\frac{0}{0}$ всюду понимается как 0.

2. Определение. Пусть $f \in \tilde{C}$, $n \geqslant 0$ — целое число. Величину

$$\rho_n(f) = \sup_{|h|\leqslant\pi/(n+1)} E_n(f(x + h/2) - f(x - h/2))$$

будем называть *E*-модулем непрерывности первого порядка функции f, а величину

$$\gamma_n(f) = \sup_{|h|\leqslant\pi(n+1)} E_n(f(x + h) - 2f(x) + f(x - h))$$

E-модулем непрерывности второго порядка функции f.

Очевидно, что для любой $f \in \tilde{C}$.

$$\rho_n(f) \leqslant 2E_n(f), \quad \gamma_n(f) \leqslant 4E_n(f),$$
$$\rho_n(f) \leqslant \omega_1(\pi / (n+1), f), \quad \gamma_n(f) \leqslant \omega_2(\pi / (n+1), f).$$

Теорема A (см., например *, (1), стр. 302, 316). *Пусть $n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ — целые числа. Тогда*

$$\sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{E_n(f^{(r)})} = \sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{\|f^{(r)}\|} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} = K_r.$$

С помощью этой теоремы легко установить, что, если $f \in \tilde{C}^{(r)}$ $(r \geqslant 1)$, то

$$\rho_n(f) \leqslant 2K_r E_n(f^{(r)}) / (n+1)^r, \quad \gamma_n(f) \leqslant 4K_r E_n(f^{(r)}) / (n+1)^r,$$
$$\rho_n(f) \leqslant K_r \omega_1(\pi / (n+1), f^{(r)}) / (n+1)^r,$$
$$\gamma_n(f) \leqslant K_r \omega_2(\pi / (n+1), f^{(r)}) / (n+1)^r.$$

* В книге (1) теорема A приведена для пространства L_∞, но ясно, что она справедлива и для пространства C.

Теорема 1. *Пусть $f \in \tilde{C}^{(3)}$, $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда*

$$E_n(f') \leqslant \frac{3^{1/3}}{2^{4/3}} \gamma_n^{1/3}(f)\, \omega_1^{2/3}\left(\frac{\pi}{n+1}, f'''\right),$$

$$E_n(f'') \leqslant \frac{3^{1/3}}{2^{2/3}} \gamma_n^{1/3}(f)\, E_n^{2/3}(f''').$$

В силу классической теоремы Джексона при любом целом $r \geqslant 0$

$$\sup_{n \geqslant 0} \sup_{f \in \tilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{\omega_1\left(\frac{\pi}{n+1}, f^{(r)}\right)} = D(r) < +\infty.$$

Естественно поставить вопрос о вычислении величины $D(r)$. Н. П. Корнейчук (2) показал, что $D(0) = 1$. При других r значение $D(r)$ неизвестно. Следствие 1, в частности, дает ответ на этот вопрос для случая $r = 1$.

Следствие 1 *. *Пусть $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда*

$$\sup_{f \in \tilde{C}^{(1)}} \frac{(n+1) E_n(f)}{\omega_1\left(\frac{\pi}{n+1}, f'\right)} = \sup_{f \in \tilde{C}^{(1)}} \frac{2^{1/3}(n+1) E_n(f)}{\omega_2^{1/3}\left(\frac{\pi}{n+1}, f'\right) \omega_1^{2/3}\left(\frac{\pi}{n+1}, f'\right)} = \frac{\pi}{4}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_n$ — множество функций $f \in \tilde{C}^{(1)}$ таких, что у них все первые n коэффициентов Фурье равны нулю. Г. Бор ((3), стр. 251) доказал, что для любой $f \in \mathfrak{M}_n$ справедливо неравенство **

$$\|f\| \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} \|f'\| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где постоянная $\pi / 2(n+1)$ на всем множестве функций $f \in \mathfrak{M}_n$ не может быть уменьшена.

Ж. Фавар (4) и независимо от него Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн (5) доказали, что для любой $f \in \tilde{C}^{(1)}$ $E_n(f) \leqslant \pi\|f'\| / 2(n+1)$, где на всем множестве $\tilde{C}^{(1)}$ постоянная $\pi / 2(n+1)$ не может быть уменьшена. Теорема 2 уточняет результаты Г. Бора, Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда:*

а) *для любой $f \in \mathfrak{M}_n$*

$$\|f\| \leqslant \frac{\pi}{2^{1/3} 4(n+1)} \omega_2^{1/3}\left(\frac{\pi}{n+1}, f'\right) \omega_1^{2/3}\left(\frac{\pi}{n+1}, f'\right),$$

в) *для любой $f \in \mathrm{Lip}(1, M, 2) \cap \mathfrak{M}_n$*

$$\|f\| \leqslant \pi M^{2/3} \|f'\|^{1/3} / 2^{5/3}(n+1),$$

с) *для любой $f \in \mathrm{Lip}(1, M, 2) \cap \tilde{C}^{(1)}$*

$$E_n(f) \leqslant \pi M^{2/3} \|f'\|^{1/3} / 2^{5/3}(n+1).$$

Очевидно, что неравенство Г. Бора следует как из соотношения пункта а), так и пункта в). Неравенство Фавара — Ахиезера — Крейна легко получается из пункта с). Это доказывает точность установленных соотношений.

Теорема 3. *Пусть $f \in \tilde{C}^{(2)}$, $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда*

$$E_n(f') \leqslant \{{}^1\!/_2 \rho_n(f)\, \omega_1(\pi / (n+1), f'')\}^{1/2}, \tag{1}$$

$$E_n(f') \leqslant \{\rho_n(f) E_n(f'')\}^{1/2}. \tag{2}$$

Отметим, что в соотношении (2), которое является следствием неравенства (1), постоянная 1 на всем множестве функций $\tilde{C}^{(2)}$ ни при одном n не может быть уменьшена.

---

* При установлении следствий используется и теорема А.

** Для удобства сравнения мы приводим неравенство Г. Бора, так же как и цитируемый ниже результат Фавара — Ахиезера — Крейна, применительно к пространству $\tilde{C}$.

Теорема 4. *Пусть* $f \in \tilde{C}^{(3)}$, $n \geqslant 0$ — *целое число. Тогда*

$$E_n(f') \leqslant {}^1/_2\,({}^3/_2)^{2/3}\{\rho_n^2(f)E_n(f''')\}^{1/3}.$$

Здесь постоянная ${}^1/_2\,({}^3/_2)^{2/3}$ *на всем множестве* $\tilde{C}^{(3)}$ *при каждом* n *является точной.*

Следствие 2. *Пусть* $n \geqslant 0$ — *целое число. Тогда*

$$\sup_{f \in \tilde{C}^{(2)}} \frac{(n+1)^2 E_n(f)}{\{2\omega_1^2(\pi/(n+1), f'')\,E_n(f'')\}^{1/3}} = \frac{\pi^2}{16}.$$

В силу классического неравенства * Ж. Адамара для любой $f \in \tilde{C}^{(2)}$ $\|f'\|^2 \leqslant 2\|f\|\|f''\|$, причем постоянная на множестве всех функций $f \in \tilde{C}^{(2)}$ не может быть уменьшена. Г. Е. Шилов ([6]) установил, что для любой $f \in \tilde{C}^{(3)}$ $\|f'\|^3 \leqslant {}^9/_8\|f\|^2\|f'''\|$, $\|f''\|^3 \leqslant 3\|f\|\|f'''\|^2$, где постоянная на множестве всех функций $f \in \tilde{C}^{(3)}$ не может быть уменьшена. Кроме того, Г. Е. Шилов полностью рассмотрел случай, когда порядок старшей производной равен 4 и когда порядок старшей производной равен 5, а оцениваемой — 2. В дальнейшем исчерпывающий результат в этом направлении получен А. Н. Колмогоровым ([7]). Следствие 3 устанавливает аналог цитируемых результатов Адамара — Шилова применительно к наилучшим приближениям.

Следствие 3. *Пусть* $n \geqslant 0$ — *целое число. Тогда*

$$\sup_{f \in \tilde{C}^{(2)}} E_n^2(f') / E_n(f'')\,E_n(f) = 2,$$

$$\sup_{f \in \tilde{C}^{(3)}} E_n^3(f') / E_n^2(f)\,E_n(f''') = {}^9/_8,$$

$$\sup_{f \in \tilde{C}^{(3)}} E_n^3(f'') / E_n(f)\,E_n^2(f''') = 3.$$

Теорема 5. *Пусть* $f \in \tilde{C}^{(1)}$ *такова, что* $f' \in \mathrm{Lip}(\alpha, M, 2)$, *где* $\alpha \in [0, 2]$, $n \geqslant 0$ — *целое число. Тогда*

$$E_n(f') \leqslant \{[(\alpha+1)/\alpha]^\alpha 2^{-1} M E_n^\alpha(f)\}^{1/(\alpha+1)}.$$

Следствие 4. *Пусть* $n \geqslant 0$ — *целое число.* $\mathfrak{M}$ — *множество функций* $f \in \tilde{C}^{(1)}$, *у которых* $f' \in \mathrm{Lip}(1, M, 2)$. *Тогда*

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} E_n^2(f') / E_n(f) = M.$$

Все результаты заметки остаются справедливыми и для пространства L_1.

Новгородский филиал
Ленинградского электротехнического института
им. В. И. Ленина

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. [2] Н. П. Корнейчук, ДАН, 145, 514 (1962). [3] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1965. [4] I. Tavard, Bull. Sci. Math. (2), 61, 209, 243 (1937). [5] Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, ДАН, 15, 107 (1937). [6] Г. Е. Шилов, Сборн. научн. студ. работ Московск. унив., 17 (1937). [7] А. Н. Колмогоров, Уч. зап. Московск. унив., 30, 3 (1939).

* Для удобства сравнения мы приводим неравенство Ж. Адамара, так же, как и цитируемый ниже результат Г. Е. Шилова, установленные для функций, заданных на всей оси, применительно к периодическим функциям.