Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 519.4 *МАТЕМАТИКА*

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

НИЛЬПОТЕНТНАЯ p-ГРУППА ОБЛАДАЕТ ВНЕШНИМ АВТОМОРФИЗМОМ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 29 VI 1970)

Е. Шенкман и Ф. Хаимо высказали предположение, что всякая нильпотентная группа обладает внешним автоморфизмом *. Оно сформулировано также в монографии ([1]). В некоторых частных случаях предположение было доказано в работах ([2–4]). В частности, в ([4]) рассмотрен случай конечнопорожденных нильпотентных групп без кручения. Внешние автоморфизмы конечных нильпотентных групп построены В. Гашюцом ([5], [6]).

В статье будет доказана

Теорема. *Бесконечная нильпотентная p-группа обладает внешним автоморфизмом.*

Автор располагает примером нильпотентной группы без кручения, не имеющей внешних автоморфизмов. Именно, если L, M, N — бесконечные непересекающиеся множества простых чисел, причем $2 \notin N$, и всякое простое число принадлежит одному из множеств L, M, N, то упомянутая группа задается в виде подгруппы группы матриц образующими:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/p & 1/p^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ p \in L; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/p^2 \\ 0 & 1 & 1/p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ p \in M, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/p & 0 \\ 0 & 1 & 1/p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ p \in N.$$

Обозначения. G^n — группа, порожденная элементами g^n, $g \in G$; G' — коммутант G; $G(n) = G' \cdot G^n$; $\mu(G)$ — мощность бесконечной группы G; $C_G(M)$ — централизатор множества $M \subset G$ в группе G. Группу G будем называть группой конечной экспоненты, если $G^n = 1$ для подходящего натурального n, и группой бесконечной экспоненты в противном случае.

Вспомогательные утверждения.

I) Абелева группа конечной экспоненты представима в виде прямого произведения циклических групп (([7]), § 24).

II) Если A — прямое произведение циклических p-групп, то $\mu(A / A^p) = \mu(A)$, если A бесконечна, и A конечна, если A / A^p конечна.

III) Всякая абелева p-группа A обладает подгруппой со следующими свойствами (см. ([7]), § 26, ([8]), ch. V): 1) B — прямое произведение циклических групп; 2) A / B — полная группа; 3) $a^p = b \in B \Rightarrow b_1^p = b$ для подходящего $b_1 \in B$; 4) $A / A^{p^n} \cong B / B^{p^n}$ для любого целого n; 5) существует эпиморфизм группы A на группу B. Всякая подгруппа с указанными свойствами называется базисной подгруппой абелевой p-группы A; любые две базисные подгруппы изоморфны; 6) если B — группа конечной экспоненты, то $A = B \times C$, где C — полная подгруппа группы A.

IV) Абелева p-группа A называется полной, если уравнение $x^p = a$ разрешимо в A для любого $a \in A$. Всякая фактор-группа A / A_1 полной группы снова полна, и если A / A_1 — группа конечной экспоненты, то $A = A_1$ (([7]), § 23).

Пусть G — нильпотентная p-группа, Z — центр G.

---

* Исключая группы порядка 1 и 2. По-видимому, первое упоминание этого предположения в работе ([3]).

V) Если $g, h \in G$ и $(g, h) \in Z$, то для любого целого n $(g^n, h) = (g, h^n) = (g, h)^n$.

VI) Если G бесконечна, то $\mu(G) = \mu(G / G')$.

VII) Если G / G' — группа конечной экспоненты, то G — группа конечной экспоненты.

VIII) Если G / G' — конечная группа, то G — конечная группа.

IX) Если $G' \cap Z$ — группа конечной экспоненты, то G — группа конечной экспоненты.

X) Пусть k — класс нильпотентности группы G, и пусть M_n — множество элементов порядка n в группе G. Тогда при $l = n^k$ $g^l m = m g^l$ для любого $g \in G$, $m \in M$. Другими словами, экспонента группы $G / C_G(M)$ не превосходит n^k.

Утверждения VI) — X) легко доказываются индукцией по классу нильпотентности с использованием формулы V). Докажем, например, X). Из справедливости X) для G/Z следует, что $(g^{n^{k-1}}, m) \in Z$ для любых $g \in G$, $m \in M$; тогда $(g^{n^k}, m) = ((g^{n^{k-1}})^n, m) = (g^{n^{k-1}}, m^n) = 1$ в силу V).

XI) Пусть нильпотентная p-группа G является расширением абелевой группы A с помощью полной абелевой группы. Тогда G — абелева группа.

В самом деле, пусть A_1 — максимальный абелев нормальный делитель G, содержащий A. В силу IV) G / A_1 — полная группа. Если L_n — множество элементов порядка p^n группы A_1, то $C_G(L_n) \supset A_1$ и ввиду X) $G / C_G(L_n)$ — группа конечной экспоненты, изоморфная фактор-группе полной группы G / A_1. Используя IV), получаем, что $L_n \subset Z$ для любого целого n, и так как $A_1 = \bigcup L_n$, то $A_1 \subset Z$, чего, понятно, не может быть в нильпотентной группе.

XII) Определение. Базисной подгруппой D нильпотентной p-группы G назовем прообраз при гомоморфизме $G \to G / G'$ базисной подгруппы абелевой группы G / G' (см. III)).

XIII) Пусть $D = D^0 \supset D^1 \supset D^2 \supset \ldots \supset D^k = 1$ — нижний центральный ряд группы G. Тогда $G \supset D^1 \supset D^2 \supset \ldots \supset D^k = 1$ — нижний центральный ряд группы G.

Доказательство. Пусть L_n — множество элементов порядка p^n в группе D^{k-1}. Тогда $C_G(L_n) \supset D$, так что $G / C_G(L_n)$ — полная группа (см. IV)), следовательно, $C_G(L_n) = G$, $L_n \subset Z$. Так как $D^{k-1} = \bigcup\limits_n L_n$, то $D^{k-1} \subset Z$. Подобное рассуждение, проведенное по модулю D^i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, показывает, что D^{i-1} / D^i лежит в центре группы G / D^i, т. е. $G \supset D^1 \supset D^2 \supset \ldots \supset D^k = 1$ — центральный ряд G. Остается показать, что $(G, D^{i-1}) = D^i$. Предположим, что $(g, d) \in D^i$, $d \in D^{i-1}$, $g \in G$, $g \notin D$. Пусть l — порядок элемента d. Тогда $g = g_1^l d_1$ для подходящих $g_1 \in G$, $d_1 \in D$, ибо G / D — полная группа. Согласно V) $(g, d) = (d_1, d) \pmod{D^i}$, откуда следует XII).

XIV) Если D — бесконечная группа, то $\mu(D) = \mu(G / G(p))$.

В самом деле, так как $G' = D'$ (XII), то $G / G(p) \cong D / D(p)$ (см. III), п. 4). Так как D / D' — прямое произведение циклических групп (III), п. 1), то $\mu(D / D') = \mu(D / D(p))$ (см. II)), и согласно VI) $\mu(D / D') = \mu(D)$.

XV) Если D — группа конечной экспоненты, то $G = DZ$.

Пусть F — централизатор D в G. Поскольку G / FD — полная группа (IV) конечной экспоненты (X), то $G = FD$. Тогда $G / D \cong F / F \cap D$, так как $F \cap D$ — центр группы D, то F — расширение абелевой группы с помощью полной; согласно XI) F — абелева, откуда и вытекает XV).

XVI) Если группа D конечна, то Z содержит подгруппу типа p^∞.

Так как G бесконечна, то $G \neq D$. Как в доказательстве XV), $Z / Z \cap D$ — полная группа. Следовательно, Z содержит подгруппу Z_0, которая является расширением конечной группы $Z \cap D$ с помощью группы типа p^∞; ясно, что Z_0 удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Остается сослаться на классификационную теорему об абелевых группах с условием минимальности ([8], § 53).

XVII) Определение. Автоморфизм φ группы G, задаваемый формулой

$$\varphi(g)=g\cdot\tau(\sigma(g)),$$

где σ — естественный гомоморфизм $G\to G/G'$, τ — какой-либо гомоморфизм G/G' в $Z\cap G'$, назовем стандартным автоморфизмом. Очевидно, стандартные автоморфизмы образуют абелеву группу, изоморфную $\mathrm{Hom}(G/G', Z\cap G')$. Мы будем обозначать группу стандартных автоморфизмов через H, а через H_p ее подгруппу, образованную элементами порядка p. Очевидно, что $H_p\cong\mathrm{Hom}(G/G(p), Z\cap G')$.

Как будет показано, если G/Z — бесконечная p-группа, то не все стандартные автоморфизмы являются внутренними.

XVIII) $\mu(H_p)>\mu(G/G(p))$.

Пусть $\zeta\in Z\cap G'$, $\zeta^p=1$. Так как $\mu(G/G(p))$ равна мощности множества M образующих группы $G/G(p)$ (см. I)), то всякое отображение вида $x\to\zeta$, либо $x\to 1$, когда x пробегает M, продолжается до гомоморфизма $G/G(p)$ в Z; поэтому $\mu(H_p)\geqslant 2^\nu$, $\nu=\mu(G/G(p))$.

Доказательство теоремы. Если $\mu(G/G(p))\geqslant\mu(G/Z)$, то существование внешних автоморфизмов группы G вытекает из сопоставления следующих двух фактов: мощность группы всех автоморфизмов группы G строго больше $\mu(G/G(p))$ (см. XVIII)), в то время как мощность группы внутренних автоморфизмов равна $\mu(G/Z)$.

Если группа $G/G(p)$ конечна, то, как следует из III), п. 4) и II), D/D' конечна, и сама D конечна (см. VIII)). Тогда $G=DZ$ (см. XV)); кроме того, согласно XVI), Z содержит подгруппу Z_0 типа p^∞. Множество автоморфизмов группы G вида $g\to g\cdot\tau(\sigma(g))$, где $\sigma\colon G\to G/D$, τ пробегает гомоморфизмы полной группы G/D на Z_0, бесконечно, и, следовательно, поскольку G/Z конечна, все такие автоморфизмы не могут быть внутренними.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $G/G(p)$ бесконечна и $\mu(G/G(p))<\mu(G/Z)$. Тогда D/D' бесконечна. Заметим сначала, что при этом условии D/D' не может быть группой конечной экспоненты. Действительно, в этом случае D была бы группой конечной экспоненты (см. VII)), и согласно XV) $G=DZ$; отсюда следует, что

$$\mu(G/Z)=\mu(D/Z)\leqslant\mu(D/D')\overset{(*)}{=}\mu((D/D')/(D(D')^p)=\mu(G/G(p)).$$

Равенство (*) следует из II), а последнее равенство — из (III), п. 4).

Итак, D/D' бесконечной экспоненты. Кроме того, $\mu(G/G(p))\leqslant\leqslant\mu(G/Z)$ влечет условие $Z_1=Z\cap G'$ — группа бесконечной экспоненты. В самом деле, если группа Z_1 имеет конечную экспоненту, то G имеет конечную экспоненту IX), и тогда $\mu(G/G(p))=\mu(G/G')=\mu(G)\geqslant\geqslant\mu(G/Z)$ (см. II) и VI)). Остается рассмотреть случай, когда Z_1 — бесконечной экспоненты. Пусть Z_1^* — базисная подгруппа Z_1. Если Z_1^* конечной экспоненты, то $Z_1=Z_2\times Z_1^*$, где Z_2 — полная подгруппа группы Z_1 (см. III), п. 6). Следовательно, Z_2 содержит подгруппу Z_0 типа p^∞, так что автоморфизм группы G вида $g\to g\cdot\tau(\sigma(g))$, где $\sigma\colon G\to G/D$, τ — некоторый гомоморфизм полной группы G/D на Z_0 бесконечного порядка и не может быть внутренним.

Наконец, предположим, что Z_1^* — группа бесконечной экспоненты. Тогда Z_1^* обладает подгруппой Z_3, которая является прямым произведением бесконечного числа циклических p-групп попарно различных порядков. Так как D/D' — прямое произведение циклических p-групп, порядки которых не ограничены в совокупности, то существует эпиморфизм D/D' на Z_3. Согласно (III), п. 5) существует эпиморфизм G/G' на D/D'. Следовательно, существует эпиморфизм τ группы G / G' на Z_3. Теперь очевидно, что автоморфизм $g \to g \cdot \tau(\sigma(g))$, где σ: $G \to G / G'$, имеет бесконечный порядок и быть внутренним не может. Теорема доказана.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», 1966. [2] E. Schenkman, Proc. Am. Math. Soc., 6, № 1, 6 (1955). [3] R. Ree, Proc. Am. Math. Soc., 7, № 6, 962 (1956). [4] R. Ree, Proc. Am. Math. Soc., 9, № 1, 105 (1958). [5] W. Gaschütz, Math. Zs., 88, № 5, 432 (1965). [6] W. Gaschütz, J. Algebra, 4, № 1, 1 (1966). [7] А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», 1967. [8] L. Fuchs, Abelian Groups, Budapest, 1958.