Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 512.25 : 512.87 : 519.123 *МАТЕМАТИКА*

Р. А. ЗВЯГИНА

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МАТРИЦАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 30 VI 1970)

В статье предлагается новый подход к разработке специальных методов для решения задач линейного программирования (л.п.) большого объема. Ограничиваясь рассмотрением задачи л.п. в канонической форме, состоящей в минимизации линейной функции (c, x) на множестве неотрицательных решений системы линейных уравнений $Ax = b$, заметим, что в конечных методах [1, 2] решения этой задачи на каждом шаге процесса решаются две системы линейных уравнений порядка m, совпадающего с размерностью вектора b. Эти системы имеют одну и ту же неособенную матрицу, являющуюся подматрицей матрицы A, причем на каждом шаге в этой неособенной матрице заменяется лишь один столбец.

В рассматриваемом здесь классе задач л.п. все ненулевые элементы матрицы A содержатся в некоторых специальным образом выделенных подматрицах (блоках). Предлагаемый подход состоит в некотором упорядочении множества $P = \{1, 2, \ldots, p\}$ номеров блоков матрицы A, при котором решение встречающихся на каждом шаге процесса систем линейных уравнений порядка m путем линейных преобразований типа исключения неизвестных сводится к последовательному решению подсистем, отвечающих блокам с номерами из некоторой цепи * множества P. Указанное упорядочение множества P существенно используется также при переходе к новой неособенной матрице, отличающейся от предыдущей одним столбцом.

Сложность предлагаемого процесса определяется, в основном, длиной l максимальной цепи в упорядоченном множестве P. Поэтому естественно стремиться к определению о п т и м а л ь н о г о упорядочения в множестве P, при котором длина l максимальной цепи была бы минимальной. Некоторые частные типы рассматриваемых здесь задач л.п. с блочной структурой матрицы A изучались в [2, 4–6], где неявно вводилось упорядочение множества P, причем в [2, 4, 5] оптимальное, а в [6] — для несколько более сложных задач — линейное упорядочение множества P, при котором $l = p$, в то время как для оптимального упорядочения $l = [\log_2 p] + 1$.

1. Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество номеров строк, а $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество номеров столбцов исходной матрицы $A = A[M, N]$, причем $m \leqslant n$. Предположим, что в этой матрице выделены подматрицы (блоки) $A[M_k, N_k]$, $k \in P = \{1, 2, \ldots, p\}$, определяемые множествами M_k и N_k номеров строк и столбцов соответственно. При этом M_k $(k \in P)$ — разбиение множества M, а N_k — некоторые подмножества множества N. Совокупность пар M_k, N_k $(k \in P)$ будем называть б л о ч н о й с т р у к т у р о й матрицы $A[M, N]$, если все ее ненулевые элементы содержатся в выделенных блоках.

---

* Терминология, касающаяся упорядоченных множеств, соответствует принятой в [3].

Пусть при фиксированной блочной структуре матрицы $A[M, N]$ в множестве P введено отношение порядка $\preccurlyeq$ такое, что при любом $k \in P$ упорядоченное подмножество $L(k) = \{\sigma \in P\colon k \preccurlyeq \sigma\}$ упорядоченного множества P является цепью, причем $\max\limits_{k \in P} |L(k)| = l$, где под $|L(k)|$ понимается число элементов конечного множества $L(k)$. Разобьем множество P на классы, полагая $P_s = \{k \in P\colon l - |L(k)| + 1 = s\}$, $s = 1, 2, \ldots, l$. Порядок $\preccurlyeq$ в множестве P назовем согласованным с блочной структурой матрицы A, если множества $\bar{N}_k = \bigcup N_\sigma$ $(\sigma \preccurlyeq k)$, отвечающие номерам k из одного и того же класса P_s $(1 \leqslant s \leqslant l)$, попарно не пересекаются.

Предположим, что для матрицы $A[M, N]$ с заданной блочной структурой M_k, N_k $(k \in P)$ фиксирован некоторый согласованный с ней порядок $\preccurlyeq$ и выделена квадратная подматрица $A[M, J]$ матрицы $A[M, N]$ с индуцированной в ней блочной структурой M_k, $N_k \cap J$ $(k \in P)$. Пусть J_k $(k \in P)$ — разбиение множества J такое, что $|J_k| = |M_k|$. Рассмотрим матрицы

$$\Lambda(k) = E[J, J] - E[J, J_k] S[J_k, M_k] \Lambda[M_k, J], \quad k \in P \setminus P_l. \qquad (1)$$

Здесь $E[J, J]$ — единичная матрица, $S[J_k, M_k]$; $k \in P$ — матрицы перестановки, а $\Lambda[M, J]$ — некоторая матрица с блочной структурой M_σ, $\bar{N}_{\sigma 0}$ $(\sigma \in P)$, где $\bar{N}_{\sigma 0} = \bar{N}_\sigma \cap (\bigcup\limits_{\sigma \prec \tau} J_\tau)$. Положим $\bar{\Lambda} = \prod\limits_{s=1}^{l-1} \prod\limits_{k \in P_s} \Lambda(k)$, где для каждого $s = 1, 2, \ldots, l-1$ матрицы $\Lambda(k)$, $k \in P_s$, перестановочны.

Теорема 1. *Для каждой неособенной матрицы $A[M, J]$ существуют разбиение J_k $(k \in P)$ множества J и матрица $\Lambda[M, J]$ такие, что*

1) $J_k \subset \bar{N}_k \cap J$ $(k \in P)$;

2) *матрица $B[M, J] = A[M, J]\bar{\Lambda}$ имеет блочную структуру M_k, $\bigcup J_\tau$ $(\tau \preccurlyeq k,\ k \in P)$, и ее подматрицы $B[M_k, J_k]$, $k \in P$, являются неособенными матрицами.*

Заметим, что при фиксированном разбиении J_k $(k \in P)$ множества J матрица $\Lambda[M, J]$, из блоков которой строятся матрицы (1), определяется однозначно.

2. При использовании прямого метода последовательного улучшения ([1]) для решения задачи л.п. на каждом шаге необходимо решать системы $yA[M, J] = c[J]$ и $A[M, J]g = A[M, j']$, где $A[M, j']$ — столбец матрицы $A[M, N]$.

Вектор-строка y, очевидно, может быть получен из системы $yB[M, J] = c[J]\bar{\Lambda}$, эквивалентной системе $yA[M, J] = c[J]$. В указанном методе строка $y = y[M]$ используется для вычисления величин $y[M]A[M, j] = \sum\limits_{k \in L(k_j)} y[M_k]A[M_k, j]$, где $k_j = \min\{k \in P\colon j \in N_k\}$. Поэтому достаточно определить строки $y[M_k]$ из систем порядка $m_k = |M_k|$:

$$y[M_k]B[M_k, J_k] = \bar{c}_k[J_k], \quad k \in L(k_j),$$

где $\bar{c}_k[J] = \{c[J] - \sum\limits_{k \prec \delta} y[M_\sigma]A[M_\sigma, J]\} \prod\limits_{\tau \prec k} \Lambda(\tau)$ (порядок сомножителей $\Lambda(\tau)$ такой же, как при вычислении $\bar{\Lambda}$). Отметим, что решать эти системы следует в порядке убывания номеров k в принятом упорядочении.

Перейдем теперь к нахождению столбца g. Прежде всего заметим, что в решении системы $B[M, J]\lambda^{j'}[J] = A[M, j']$ не равными нулю могут быть разве лишь векторы $\lambda^{j'}[J_k]$, $k \in L(k_{j'})$, которые последовательно определяются из систем порядка m_k:

$$B[M_k, J_k]\lambda^{j'}[J_k] = A[M_k, j'] - A[M_k, J]\lambda^{j'}(k), \quad k \in L(k_{j'}),$$

где $\lambda^{\gamma}(k) = \Sigma(\prod_{\tau < \sigma} \Lambda(\tau))E[J, J_\sigma]\Lambda^{\gamma}[J_\sigma]$ (при суммировании $k_\gamma \preccurlyeq \sigma \prec \prec k$). Для нахождения столбца g теперь можно воспользоваться формулой $g = \overline{\Lambda}\lambda^{\gamma}[J]$. Заметим также, что $S[J_k, M_k]\Lambda[M_k, j] = \lambda^j[J_k]$, $j \in \overline{N}_{k0}$, $k \in P \setminus P_l$.

3. Процесс решения задачи л.п. методом ([1]) обычно начинается с выделения матрицы $A[M, J]$, для которой $\Lambda[M, J] = 0$. Пусть теперь неособенная матрица $A[M, J']$ отличается от $A[M, J]$ одним столбцом, т. е. $J' = (J \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$, и пусть $j'' \in J_{\bar{k}}$. Тогда существуют последовательность номеров $\bar{k} = \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \ldots \prec \sigma_q$ $(q \geqslant 1)$ и последовательность номеров $j_\nu \in J_{\sigma_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$ $(j_1 = j'')$ такие, что множества $J_k' = J_k$, $k \in \in P \setminus \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q\}$, $J_{\sigma_\nu}' = (J_{\sigma_\nu} \setminus \{j_\nu\}) \cup \{j_{\nu+1}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$ $(j_{q+1} = = j')$ дают разбиение множества J' для матрицы $A[M, J']$, существование которого утверждалось в теореме 1.

Выбор последовательности номеров $j_1, j_2, \ldots, j_q$ обусловлен требованием неособенности квадратных матриц $\overline{B}[M_k, J_k']$, которые получаются к следующему шагу метода вместо матриц $B[M_k, J_k]$. Этот выбор может быть осуществлен с использованием найденного уже столбца $\lambda^{\gamma}[J]$ и имеющейся таблицы коэффициентов $\Lambda[M, J]$. Затем следует пересчитать таблицу $\Lambda[M, J]$, что может быть сделано по хорошо известным формулам ([7]) пересчета коэффициентов разложения вектора при замене одного вектора в базисе. Отметим лишь, что элементы подматриц $\Lambda[M_k, J]$, $k \in \in P \setminus L(\bar{k})$, матрицы $\Lambda[M, J]$ не меняются. Соответственно не меняются и матрицы $B[M_k, J_k]$, $k \in P \setminus L(\bar{k})$. Для остальных же k каждая из матриц $\overline{B}[M_k, J_k']$ получается из матрицы $B[M_k, J_k]$ добавлением не более двух матриц ранга 1.

4. Задание в множестве P порядка $\preccurlyeq$, согласованного с фиксированной блочной структурой M_k, N_k $(k \in P)$ матрицы A, эквивалентно заданию классов P_s $(s = 1, 2, \ldots, l)$, образующих разбиение множества P, и разбиений P_{sk} $(k \in P_{s+1})$ множеств P_s $(s = 1, 2, \ldots, l-1)$ таких, что множества $\overline{N}_k = N_k$ $(k \in P_1)$, $\overline{N}_k = N_k \cup (\bigcup_{\sigma \in P_{s-1,k}} \overline{N}_\sigma)$, $k \in P_s$, $s = 2, 3, \ldots, l$, отвечающие номерам k из одного и того же класса P_s $(1 \leqslant s \leqslant l)$, попарно не пересекаются (среди множеств P_{sk} могут быть и пустые).

Действительно, при заданном порядке $\preccurlyeq$ достаточно положить $P_{sk} = = \{\tau \in P_s\colon \tau \prec k\}$, $k \in P_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots, l-1$, а при заданных разбиениях P_s $(s = 1, 2, \ldots, l)$ и P_{sk} $(k \in P_{s+1}, s = 1, 2, \ldots, l-1)$ определить порядок $\preccurlyeq$ следующим образом: $k \preccurlyeq \sigma$, если $\overline{N}_k \subset \overline{N}_\sigma$ и $s_k \leqslant s_\sigma$, где $k \in \in P_{s_k}$, $\sigma \in P_{s_\sigma}$.

В заключение приведем несколько примеров матриц с оптимальным упорядочением блоков.

1) В блочной структуре матрицы $A[M, N]$ множества N_k попарно не пересекаются для $k \in P \setminus \{p\}$. Тогда множества $P_2 = \{p\}$, $P_1 = P_{1p} = = P \setminus P_2$ определяют оптимальный порядок $(l = 2)$, если $N_p \cap (\bigcup_{k \in P_1} N_k) \neq \neq \phi$. Если же $N_k \cap N_\sigma = \phi$ для $k, \sigma \in P$ и $k \neq \sigma$, то $P_1 = P$ $(l = 1)$.

2) В блочной структуре матрицы $A[M, N]$ множества N_k с нечетными номерами попарно не пересекаются, а множество N_k $(1 < k \leqslant p)$ с номером k, который делится на 2^t $(t \geqslant 1)$, но не делится на 2^{t+1}, пересекается разве лишь с множествами N_σ, где $k - 2^t < \sigma < k + 2^t$, $1 \leqslant \sigma \leqslant p$. В множество P_s отнесем все номера $k \in P$, которые не делятся на 2^s (но делятся на 2^{s-1}), $s = 1, 2, \ldots, l$, где $2^{l-1} \leqslant p < 2^l$. Тогда множества P_s, $s = 1, 2, \ldots, l$, и $P_{sk} = \{k - 2^{s-1}, k + 2^{s-1}\} \cap P$, $k \in P_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots, l-2$, $P_{l-1, 2^{l-1}} = P_{l-1}$ задают оптимальный порядок $(l = [\log_2 p] + 1)$, если $N_k \cap N_{k+1} \neq \phi$ для $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

3) В блочной структуре матрицы $A[M, N]$ множества N_k, N_σ пересекаются для любых $k, \sigma \in P$. Тогда множества $P_s = P_{s, s+1} = \{s\}$, $s = 1, 2, \ldots, p-1$, $P_p = \{p\}$ задают оптимальный порядок $(l = p)$.

Если $N_k \cap N_\sigma = \phi$ хотя бы для одной пары k, $\sigma \in P$, то в множестве P всегда можно задать порядок, согласованный с блочной структурой M_k, N_k ($k \in P$) матрицы A, для которого $l < p$. Однако, описанный процесс решения задачи л.п. особенно эффективен в тех случаях, когда удается упорядочить множество P таким образом, что $l \ll p$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959. [2] Г. Ш. Рубинштейн, Оптимальное планирование, № 2, 3 (1964). [3] Д. А. Райков, Векторные пространства, 1962. [4] G. B. Dantzig, Ph. Wolfe, Operat. Res., № 1, 101 (1960). [5] Р. А. Звягина, Оптимальное планирование, № 2, 52 (1964). [6] A. R. G. Heesterman, J. Sandee, Manag. Sci., 11, № 3, 420 (1965). [7] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.