Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (114), 2019

Математика

УДК 512.542

О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, в группах с операторами

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин, А.В. Бузланов

Исследуются пересечения подгруппы близкие к $\mathfrak{F}$-абнормальным максимальным подгруппам.
Ключевые слова: оператор, подгруппа, пересечение, индекс, формация.

The intersections of the given systems of maximal subgroups of finite groups are investigated.
Keywords: operator, subgroup, intersection, index, formation.

1. Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории групп одними из важных предметов исследования являются объекты экстремально расположенные в группе. В нашей работе такими объектами будут выступать максимальные подгруппы, среди всех подгрупп, выдерживающих действие некоторой группы операторов. Исторически это направление берет свое начало от подгруппы Фраттини, введенной в работе [1]. Эта работа получила развитие в исследованиях многих авторов: В. Гашюца [2] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G), В. Дескинса [3] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на p) и других (см. монографии [4] и [5]).

Развитие теории формаций позволило взглянуть на теорию пересечений с позиции $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы, введённой в работах Р. Картера, Т. Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7].

2. Определения и обозначения.

Подгруппа H группы G называется:

– пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$;

– абнормальной, если $x \in < H, H^x >$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G / N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через:

– $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп;

– $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп;

– $\Delta_p(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, индексы которых не делятся на простое число p;

– $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G;

– $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, индексы которых не делятся на простое число p.

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G.

Отметим, что в случае единичности группы операторов A подгруппы $\Phi(G, A)$, $\Delta(G, A)$, $\Delta_p(G, A)$ совпадают соответственно с подгруппами Фраттини $\Phi(G)$, Гашюца $\Delta(G)$ и Дескинса $\Delta_p(G)$.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [8].

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [9] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

Пусть Θ – подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных A-допустимых подгрупп и саму группу. Тогда $\bar{\Theta}(G)$ – множество всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, которые не сопряжены с некоторой фиксированной подгруппой M группы G. Понятно, что $\bar{\Theta}(G)$ содержит и саму группу G. При этом $\Phi_{\Theta}(G) = M_G$ – ядро подгруппы M в группе G. Очевидно, что

$$\Phi_{\bar{\Theta}}(G) \cap M_G = \Phi(G, A)$$

для любой группы G.

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. [10, с. 114]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$ и подгруппа $\Phi_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}. Тогда*

$$\Delta_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Delta(G / O_{\pi}(G), A).$$

Теорема 3.2. [11, с. 29]. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Тогда*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

Теорема 3.3. [11, с. 29]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Delta(G, A)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$.*

Лемма 3.4. [12, с. 64]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Если G обладает свойством C_{π}, то G содержит A-допустимую S_{π}-подгруппу.*

Лемма 3.5. [4, с. 179]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

Лемма 3.6. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа из G, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}N / N$, с индексом, не делящимся на p. Тогда

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = \cap(M / N)_{G/N},$$

где M / N пробегает множество всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}N / N$ из G / N, с индексом, не делящимся на p. Поэтому

$$\cap(M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N$$

и утверждение леммы верно.

4. Основной результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_p(G) \neq 1$. По лемме 3.1

$$\Delta_p(G, A) / O_p(G) = \Delta(G / O_p(G), A).$$

Тогда теорема для факторгруппы $G / O_p(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A)/O_p(G/O_p(G)) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G)/O_p(G/O_p(G)),A).$$

Так как $O_p(G/O_p(G)) = 1$ и на основании леммы 3.6

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A) = D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G),$$

то

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A).$$

Пусть теперь $O_p(G) = 1$. Тогда по лемме 3.1 $\Delta_p(G,A)/O_p(G) = \Delta(G/O_p(G),A)$. Значит,

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_p(G,A) = \Delta(G,A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причём,

$$\Delta(G,A) \subseteq N \subseteq K \subseteq D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G,A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}} \simeq K/K \cap NG^{\mathfrak{F}} = K/N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K/N.$$

Но $G/NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K/N также является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Таким образом, $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G,A)$. Поэтому

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Delta(G,A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.2

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A) \supseteq D^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Delta(G,A)).$$

Значит,

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Delta(G,A)).$$

Следовательно,

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A) = D^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Delta(G,A),$$

то есть $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 с помощью теоремы 3.3 получаем следующее

Следствие 4.1.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$.*

Если группа операторов тривиальна, то из теореммы 4.1 получаем

Следствие 4.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, тогда*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G)/O_p(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G)).$$

Следствие 4.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$.*

Теорема 4.2. *Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1$, справедливо равенство*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G,A)=D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Доказательство. Очевидно, что $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_{\Delta q}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Пусть $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\subset K=D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Тогда в G найдётся абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, такая, что $G=MK$. Если $|G:M|$ не делится на $t\in\{p,q\}$, то $D_t^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq M$. Следовательно, $KM=M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на p и q.

Пусть $O_p(G)=1$. Тогда ввиду теоремы 4.1 имеем равенство $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)=D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Поэтому $K\subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K. Значит, $O_p(G)\neq 1$. Если $O_p(G)M=G$, то $|G:M|$ делится на p. Противоречие. Поэтому $O_p(G)\subseteq M$. На основании теоремы 4.1 имеем

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G)=D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A)\subseteq M/O_p(G).$$

Отсюда следует, что $D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G,A)=D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Теорема доказана.

Следствие 4.2.1. *Пусть p и q – различные простые числа. Если $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, тогда*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}.$$

В случае, когда группа операторов единична, то из теоремы 4.2 получаем

Следствие 4.2.2. *Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G справедливо равенство*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G)\cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G)=D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G).$$

Следствие 4.2.3. *Пусть p и q – различные простые числа. Если $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то*

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G)\cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}.$$

Теорема 4.3. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных A-допустимых подгрупп и саму группу. Тогда справедливо $\Phi_{\bar\theta}(G,A)/P\subseteq\Phi(G/P,A)$, где P – нормальная A-допустимая p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Согласно лемме 3.4 в подгруппе $\Phi_{\bar\theta}(G)$ существует A-допустимая силовская p-подгруппа P, не содержащаяся в максимальной A-допустимой θ-подгруппе M. Предположим, что P не нормальна в G. По лемме 3.5 и лемме Фраттини $\Phi_{\bar\theta}(G)N_G(P)=G$. Пусть K – максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(P)$. Тогда $\Phi_{\bar\theta}(G)K=G$. Так как $|G:M|\neq|G:K|$, то K не сопряжена с M в G. Следовательно, $K\supseteq\Phi_{\bar\theta}(G,A)$. Тогда $K=G$. Противоречие. Остаётся заключить, что P – нормальная p-подгруппа группы G.

Так как M Ы P, то несложно заметить, что $\Phi_{\bar{\theta}}(G, A) / P \subseteq \Phi(G / P, A)$. Теорема доказана.

Следствие 4.3.1. *В любой группе подгруппа, равная пересечению всех максимальных A-допустимых подгрупп, не сопряжённых с данной максимальной A-допустимой подгруппой, метанильпотентна.*

Следствие 4.3.2. *В любой группе подгруппа, равная пересечению всех максимальных подгрупп, не сопряжённых с данной максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Ill.J.Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6. Carter, R. The F-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J.Algebra. – 1967. – V. 5, № 2. – P. 175–202.

7. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

8. Бородич, Р.В. Об F-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

9. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

10. Бородич, Р.В. Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов / Р.В. Бородич // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта імя П.М. Машэрава. – 2003. – № 2. – С. 111–115.

11. Бородич, Р.В. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих F-корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 26–30.

12. Поляков, Л.Я. О конечных группах с заданной группой операторов / Л.Я. Поляков // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 63–67.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 09.04.2019