Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 2

УДК 518.731.343.1

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ, А. И. СУББОТИН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Работа примыкает к исследованиям ([1-17]). Пусть система описывается уравнением

$$dx / dt = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; u, v — векторные управляющие воздействия первого и второго игроков, стесненные ограничениями

$$u \in \mathscr{P}, \quad v \in Q, \tag{2}$$

где $\mathscr{P}$ и Q — компакты; непрерывная функция $f(t, x, u, v)$ в каждой ограниченной области удовлетворяет условию Липшица по x и условиям продолжимости решений $x[t]$. В $(n+1)$-мерном пространстве $\{t, x\}$ заданы замкнутые множества $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$. Первый игрок стремится перевести точку $\{t, x[t]\}$ на $\mathscr{M}$ и обеспечить при этом выполнение фазового ограничения $\{t, x[t]\} \in \mathscr{N}$ вплоть до встречи с $\mathscr{M}$. Второй игрок препятствует ему в этом. Предполагается, что в каждый текущий момент времени $t \geqslant t_0$ игрокам известна реализованная позиция игры $\{t, x[t]\}$, но не известен выбор управления партнером в данный и в последующие моменты времени.

Функции $U = U(t, x)$ $(V = V(t, x))$, определенные при $t \geqslant t_0$ и при всех x, которые ставят позиции игры $\{t, x\}$ в соответствие множество регулярных борелевских мер $\mu(du)$ $(\nu(dv))$, нормированных на $\mathscr{P}(Q)$, задают смешанные стратегии первого (второго) игрока. Движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U, V)$, порожденные парой стратегий U и V, определяются как пределы ломаных Эйлера $x_k[t]$ $dx_k[t]/dt = \iint f(t, x_k[t], u, v) \times \mu_i^{(k)}(du)\nu_i^{(k)}(dv)$, $\tau_i^{(k)} \leqslant t < \tau_{i+1}^{(k)}$, $\tau_0^{(k)} = t_0$, $x_k[t_0] \to x_0$, $\max(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$, $\mu_i^{(k)}(du) \in U(\tau_i^{(k)}, x_k[\tau_i^{(k)}])$, $\nu_i^{(k)}(dv) \in V(\tau_i^{(k)}, x_k[\tau_i^{(k)}])$.

Тривиальные стратегии игроков U_T и V_T задаются множествами всевозможных нормированных мер $\mu(du)$ и $\nu(dv)$.

Теорема 1. *Пусть $\{t_0, x_0\}$ — начальная позиция игры, $\vartheta \geqslant t_0$ — некоторый момент времени. Тогда*

(1°) *либо существует смешанная стратегия первого игрока U_* такая, что для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V_T]$ выполняются соотношения*

$$\vartheta(x[\cdot], \mathscr{M}) \leqslant \vartheta, \quad \{t, x[t]\} \in \mathscr{N} \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot], \mathscr{M});$$

(2°) *либо существует положительное число $\varepsilon > 0$ и смешанная стратегия второго игрока V_* такие, что для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_T, V_*]$ выполняется условие*

$$\rho(\{t, x[t]\}; \mathscr{M}) > \varepsilon \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \tau^\varepsilon(x[\cdot], \mathscr{N})\}.$$

Здесь символом $\vartheta(x[\cdot], \mathscr{M})$ обозначен момент времени, когда впервые $\{t, x[t]\} \in \mathscr{M}$; $\tau^\varepsilon(x[\cdot], \mathscr{N})$ — момент времени, когда впервые $\rho(\{t, x[t]\}; \mathscr{N}) \leqslant \varepsilon$; $\rho(\{t, x\}; \mathscr{G})$ — расстояние от точки $\{t, x\}$ до множества $\mathscr{G}$; $\mathscr{G}^\varepsilon$ — ε-окрестность множества $\mathscr{G}$.

Содержательный смысл теоремы 1 раскрывается в классе **аппроксимационных смешанных стратегий.** Пусть задано некоторое разбиение Г полуоси $[t_0, \infty)$ совокупностью полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$ Тогда аппроксимационная смешанная стратегия $U^{(a)}$ формирует управляющие воздействия $u[t]$ следующим образом. Пусть в момент времени $t = \tau_i$ реализовалась позиция игры $\{\tau_i, x[\tau_i]\}$. Этой позиции ставится в соответствие конечное множество векторов $\{u_k\}$, $u_k \in \mathscr{P}$. Из совокупности этих векторов с некоторой вероятностью $p_k = p(u_k, \tau_i, x[\tau_i])$ выбирается u_k, затем на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ движение системы (1) порождается постоянным управлением $u[t] = u_k$ (в паре с некоторой реализацией $v[t]$). Аналогичным образом определяется стратегия $V^{(a)}$. Если оба игрока выбирают стратегии $U^{(a)}$ и $V^{(a)}$, то выбор управлений взаимно независим. На множестве движений системы (1), порожденных аппроксимационными стратегиями, естественным образом задается вероятностное распределение.

Теорема 2. *Для данной позиции $\{t_0, x_0\}$ либо найдется число $\vartheta \geqslant t_0$, удовлетворяющее условию: для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ можно указать такое разбиение Г и такую стратегию $U_*^{(\alpha)}$,* что, *какова бы ни была стратегия $V^{(\alpha)}$, для движений $x[t]$, порожденных стратегиями $U_*^{(\alpha)}$ и $V^{(\alpha)}$, условия*

$$\vartheta(x[\cdot], \mathscr{M}^\varepsilon) \leqslant \vartheta, \qquad \{t, x[t]\} \in \mathscr{N}^\varepsilon \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot], \mathscr{M}^\varepsilon)$$

будут выполняться с вероятностью не меньшей чем $p = 1 - \alpha$; либо какое бы ни было $\vartheta \geqslant t_0$, найдется число $\varepsilon > 0$, для которого при любом $\alpha > 0$ можно указать разбиение Г и стратегию $V_*^{(\alpha)}$ такие, что, какова бы ни была стратегия $U^{(\alpha)}$, для движений, порожденных стратегиями $U^{(\alpha)}$ и $V_*^{(\alpha)}$, с вероятностью не меньшей чем $p = 1 - \alpha$, будет выполняться соотношение

$$\rho(\{t, x[t]\}; \mathscr{M} \geqslant \varepsilon \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \min\{\vartheta, \tau^\varepsilon(x[\cdot], \mathscr{N})\}.$$

Пусть далее $\mathscr{V}_1$ — совокупность стратегий, которые задаются однозначными функциями $V = V(t)$, зависящими лишь от переменной t; через $\mathscr{V}_2$ обозначим класс стратегий, которые задаются однозначными слабо непрерывными функциями $V = V(t, x)$; множество $\mathscr{V}_3$ составляют стратегии, заданные слабо полунепрерывными по включению по x и по t справа функциями $V = V(t, x)$, причем при всех $\{t, x\}$ множества $V(t, x)$ слабо замкнуты и выпуклы; класс $\mathscr{V}_4$ будут составлять смешанные стратегии. Аналогичным образом определяются классы стратегий $\mathscr{U}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Множество поглощения $\mathscr{W}_j^i(\tau, \vartheta; \mathscr{M})$ $(i = \mathrm{I}, \mathrm{II};\ j = 1, 2, 3, 4)$ есть совокупность всех точек w таких, что при выборе любой стратегии $V \in \mathscr{V}_j$ найдется движение $x[t] = x[t; \tau, w, U_T, V]$, удовлетворяющее условиям

$$(i = \mathrm{I}) \qquad \{\vartheta, x[\vartheta]\} \in \mathscr{M}, \quad \{t, x[t]\} \in \mathscr{N} \text{ при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta;$$

$$(i = \mathrm{II}) \quad \vartheta(x[\cdot], \mathscr{M}) \leqslant \vartheta, \quad \{t, x[t]\} \in \mathscr{N} \text{ при } \tau \leqslant t \leqslant \vartheta(x[\cdot], \mathscr{M}).$$

Известно, что множества $\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}$ сильно u-стабильны, а множества $\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}$ u-стабильны [14–17]. Выполнение условия $x_0 \in \mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}(t_0, \vartheta; \mathscr{M})$ является достаточным для разрешимости задачи сближения к моменту ϑ, а условие $x_0 \in \mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t_0, \vartheta; \mathscr{M})$ является необходимым и достаточным для разрешимости задачи сближения к моменту ϑ (в смысле теорем 1 и 2). При этом решение задачи сближения доставляют стратегии U_e, экстремальные к системам множеств $\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}$ и $\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}$ [14–17].

Множества $\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}$ строятся следующим образом. Пусть $\mathscr{G}_\sigma$ сечение множества $\mathscr{G}$ из E_{n+1} гиперплоскостью $t = \sigma$. Рассмотрим множества $\mathscr{D}^*_{k,s}$ $(k = 0, 1, \ldots, s;\ s = 1, 2, \ldots)$, заданные соотношениями

$$\mathscr{D}^*_{s,s} = \mathscr{M}_\vartheta \cap \mathscr{N}_\vartheta, \tag{3}$$

$$\mathscr{D}^*_{k,s} = \mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau_{k,s}, \tau_{k+1,s}; \mathscr{D}_{k+1,s}),$$

где $\tau_{k,s}$ $(k=0, 1, \ldots, s;\ s=1, 2, \ldots)$ — последовательности, удовлетворяющие условиям $\tau_{0,s}=\tau$, $\tau_{s,s}=\vartheta$, $\tau_{k+1,s}>\tau_{k,s}$, $\max\limits_{k}(\tau_{k+1,s}-\tau_{k,s})\to 0$ при $s\to\infty$; множество $\mathscr{D}_{k+1,s}$ состоит из точек $\{t, x\}$, для которых $x\in\mathscr{D}^*_{k+1,s}$, $t=\tau_{k+1,s}$. Множество $\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M})$ определяется предельным переходом от множеств $\mathscr{D}^*_{0,s}$ при $s\to\infty$. Отличие построения множеств $\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}$ от построения множеств $\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}$ состоит в том, что в (3) множества $\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau_{k,s},\tau_{k+1,s};\mathscr{D}_{k+1,s})$ заменяют на $\mathscr{W}_1^{\mathrm{II}}(\tau_{k,s},\tau_{k+1,s};\mathscr{D}_{k+1,s}\cup\mathscr{M})$.

Аналогичным образом с заменой V на U и изменением множеств $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ определяются множества $\mathscr{G}_j^i$, задающие экстремальные стратегии V_e.

Для эффективного построения стратегий и классификации игр интересны случаи, когда множества $\mathscr{W}_j^i$ совпадают с $\mathscr{W}_{j'}^{i'}$ при $i<i'$ и $j<j'$. Если движение описывается уравнением

$$dx\,/\,dt=A(t)x+f(t,u,v), \tag{4}$$

причем множество $\mathscr{M}$ выпукло и $\mathscr{N}=E_{n+1}$, то справедливы равенства

$$\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M})=\mathscr{W}_2^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M})=\mathscr{W}_3^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M}).$$

Если выполняются равенства

$$\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M})=\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M}); \tag{5}$$

$$\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M})=\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M}), \tag{6}$$

то стратегия U_e приобретает смысл экстремального прицеливания ([13, 15, 16]) и принадлежит классу $\mathscr{U}_3$, а движения $x[t]$ можно формализовать тогда в рамках уравнений в контингенциях. Кроме этого стратегию U_e здесь можно аппроксимировать стратегиями из $\mathscr{U}_2$. В общем случае стратегия сближения U_e (стратегия уклонения V_e) может не принадлежать классу $\mathscr{U}_3$ $(\mathscr{V}_3)$ (в тех случаях, когда множества поглощения ($\mathscr{W}$ или $\mathscr{S}$) имеют участки с негладкой вогнутой границей). Пример: задача уклонения безынерционной точки от инерционной ([3]). Здесь существует только разрывная стратегия уклонения $V_e\in\mathscr{V}_4$, не аппроксимируемая стратегиями из классов $\mathscr{V}_2$ и $\mathscr{V}_3$.

Пусть управляемое движение описывается уравнением (4); множество $\mathscr{M}$ задается условием $\{x\}_m\in\mathscr{M}^*$, где $\{x\}_m$ — вектор, составленный из первых m компонент вектора x, $\mathscr{M}^*$ — замкнутое выпуклое множество в E_m; $\mathscr{N}$ совпадает с E_{n+1}. Обозначим

$$\varepsilon^0(w,\tau,\vartheta)=\max_{\|l\|=1}\,[\inf_{U\in\mathscr{U}_1}\sup_{V\in\mathscr{V}_1}l'\{x[\vartheta,\tau,w,U,V]\}_m-\rho(l)]. \tag{7}$$

Здесь l — m-мерный вектор, $\rho(l)$ — опорная функция множества $\mathscr{M}^*$. В этом случае множество $\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau,\vartheta;\mathscr{M})$ задается неравенством $\varepsilon^0(w,\tau,\vartheta)\leqslant 0$.

Теорема 3. *Если при $\varepsilon^0(x,t,\vartheta)>0$ максимум в (7) доставляет единственный вектор $l^0(x,t,\vartheta)$, тогда справедливо равенство (5), и в случае $x_0\in\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(t_0,\vartheta;\mathscr{M})$ решение задачи сближения к моменту ϑ доставляет стратегия экстремального прицеливания $U_e\in\mathscr{U}_3$, которая задается функцией $U=U_e(t,x)$ следующего вида: если $\varepsilon^0(t,x,\vartheta)\leqslant 0$, то $U_e(t,x)$ — множество всех мер $\mu(du)$; если $\varepsilon^0(t,x,\vartheta)>0$, то $U_e(t,x)$ состоит из мер $\mu_e(du)$, удовлетворяющих условию*

$$\max_{\nu(dv)}\iint l^{0\prime}(x,t,\vartheta)\{X(\vartheta,t)f(t,u,v)\}_m\,\mu_e(du)\,\nu(dv)=$$

$$=\min_{\mu(du)}\max_{\nu(dv)}\iint l^{0\prime}(x,t,\vartheta)\{X(\vartheta,t)f(t,u,v)\}_m\,\mu(du)\,\nu(dv),$$

где $X(t,t_0)$ — фундаментальная матрица системы $dx\,/\,dt=A(t)x$.

Введем условия: (I) существует непустое множество $\mathscr{D}(\sigma, t)$ m-мерных векторов d такое, что для любой меры $\nu(dv)$ можно указать меру $\mu(du)$, удовлетворяющую условию

$$\iint \{X(\sigma, t) f(t, u, v)\}_m \mu(du) \nu(dv) = d \in D(\sigma, t); \tag{8}$$

(II) для любой меры $\mu(du)$ можно указать меру $\nu(dv)$ такую, что при всех значениях σ и t $(t_0 \leqslant t \leqslant \sigma < \infty)$ выполняется включение (8).

Теорема 4. *Если выполнены условия* (I) *и* (II), *тогда имеют место равенства* (5) *и* (6). *Решение задачи сближения при* $x_0 \in \mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau, \vartheta; \mathscr{M})$ *доставляет стратегия экстремального прицеливания* U_e, *описанная в теореме 3. Для начальной позиции, удовлетворяющей условию* $x_0 \notin \mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau, \vartheta; \mathscr{M})$, *существует стратегия* $V_e \in \mathscr{V}_3$, *гарантирующая уклонение до момента* ϑ. *Эта стратегия задается функцией* $V = V_e(t, x)$, *определяемой условием минимакса производной от функции*

$$L(t, x) = \int_t^{\vartheta} [\varepsilon^0(x, t, \sigma)]^{-1} d\sigma,$$

вычисляемой вдоль движения системы (4). *Стратегии сближения и уклонения в данном случае можно аппроксимировать стратегиями из* $\mathscr{U}_2$ *и* $\mathscr{V}_2$.

Если в формулировке условий (I) и (II) поменять местами меры $\mu(du)$ и $\nu(dv)$, то полученные таким образом условия (I*) и (II*) будут также достаточными для выполнения равенства $\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(\tau, \vartheta; \mathscr{M}) = \mathscr{W}_2^{\mathrm{I}}(\tau, \vartheta; \mathscr{M})$. Стратегия сближения U_e в этом случае также принадлежит классу $\mathscr{U}_3$ и построение ее аналогично построению стратегии V_e из теоремы 4. Условия (I), (II) и (I*), (II*) являются развитием свойства однотипности управляемых объектов. При этом условия (I), (II) отвечают линейным случаям ([11]), развивающим случай однотипности, когда коэффициент подобия $\beta \geqslant 1$ (см. ([16]), стр. 169), а условия (I*), (II*) отвечают линейному случаю регуляризуемости, который развивает случай однотипности при $\beta \leqslant 1$ (см. ([16]), стр. 186).

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. H. Fleming, J. Math. Anal. Appl., 3, 102 (1961). [2] C. R. Nardzewski, Adv. in Game Theory, Ann. Math. Studies, 1964, p. 113. [3] R. Isaacs, Differential Games, N. Y., 1965. [4] Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 4, 764 (1967). [5] Б. Н. Пшеничный, ДАН, 184, № 2, 285 (1969). [6] E. Roxin, J. Optimization Theory Appl., 3, № 3, 153 (1969). [7] P. Varayia, J. Lin, SIAM J. Control., 7, № 1, 141 (1969). [8] Н. Н. Петров, ДАН, 190, № 6, 1289 (1970). [9] A. Friedman, J. Diff. Equations, 7, № 1, 92 (1970). [10] Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, ДАН, 189, № 4, 721 (1969). [11] М. С. Никольский, П. Б. Гусятников, ДАН, 184, № 3, 518 (1969). [12] Э. Р. Смольяков, ДАН, 191, № 1, 39 (1970). [13] Н. Н. Красовский, ПММ, 32, № 5, 793 (1968). [14] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, 190, № 3, 532 (1970). [15] Н. Н. Красовский, ПММ, 34, № 2, 197 (1970). [16] Н. Н. Красовский, Игровые движения о встрече движений, М., 1970. [17] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, 34, в. 6 (1970).