

УДК 517.93

МАТЕМАТИКА

С. А. ЛОМОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 18 V 1970)

Для построения асимптотических решений дифференциальных уравнений с большими или малыми параметрами предлагается метод регуляризации задачи с помощью расширения исходного сингулярно возмущенного оператора.

В настоящей статье этот метод будет применен к общим системам с экспоненциальной асимптотической устойчивостью (при $\varepsilon \rightarrow 0$) вида

$$\varepsilon \dot{z} = F(z, y, t), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad \dot{y} = f(z, y, t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, $z = \{z^1, \dots, z^h\}$, $y = \{y^1, \dots, y^m\}$. Будет также изложен формализм применения этого метода к задаче Коши для систем стандартного типа

$$\dot{y} = \varepsilon Y(y, t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0. \quad (2)$$

Отметим, что при более общем условии устойчивости теоремы о предельном переходе в задаче (1) были доказаны А. Н. Тихоновым (например, ⁽¹⁾). А. Б. Васильевой развит метод ⁽²⁾ построения асимптотических решений задачи (1) с помощью идей экспоненциального пограничного слоя в предположении асимптотической устойчивости, а точнее при условии, что корни характеристического уравнения

$$\det \left\| \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(y, t)} - \lambda E \right\| = 0 \quad (3)$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i(y, t) < 0 \quad (4)$$

в рассматриваемой области $\bar{D}$. Здесь $z = \varphi(y, t)$ — изолированный асимптотически устойчивый корень системы $F(z, y, t) = 0$.

Задача (2) на отрезке $0 \leq t \leq L/\varepsilon$ ранее асимптотически решалась с помощью метода усреднения ^(1, 3). Известно, что метод Васильевой и метод усреднения — это принципиально различные методы. Здесь обе задачи будут изучены единым методом.

1. Терминология метода. Пусть имеется семейство S операторов $\{L_\varepsilon\}$, действующих при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ из области определения $\mathfrak{D}$ в пространство Υ , которые не зависят от ε , и пусть изучается задача

$$L_\varepsilon u = f \quad (u \in \mathfrak{D}, f \in \Upsilon) \quad (5)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определение 1. Асимптотическим решением задачи (5) будем называть частичную сумму $u_{\varepsilon n}$ асимптотического ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k, \quad (6)$$

принадлежащую области определения оператора L_ε .

Определение 2. Будем говорить, что ряд (6) является S -формально асимптотическим рядом, если его коэффициенты u_k являются ограниченными функциями в рассматриваемой области и $L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = f + O(\varepsilon^{n+1})$.

Определение 3. Мы скажем, что задача (5) регулярна по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, если ее решение можно представить в виде S -формально асимптотического ряда (6), коэффициенты которого не зависят от ε , а частичная сумма $u_{\varepsilon n} \in \mathfrak{D}$ при любом фиксированном ε ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$).

Определение 4. Мы будем говорить, что решение задачи (5) зависит от ε квазирегулярным образом (или задача квазирегулярна), если оператор L_ε с областью определения $\mathfrak{D}$ при любом $\varepsilon > 0$ допускает расширение $\tilde{L}_\varepsilon$ на область $\mathfrak{D}$ такое, что задача $\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} = f$ является регулярной по ε ($\tilde{u} \in \tilde{V}$).

При изучении дифференциальных уравнений при $\varepsilon \rightarrow 0$ расширение оператора L_ε производится за счет введения новых независимых переменных вида

$$t_i = \varphi_i(x) / \varepsilon^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (7)$$

и изучения вместо функции $u(x, \varepsilon)$ ($x \in \bar{M}$), новой функции $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t_1, \dots, t_l, \varepsilon)$ на неограниченном множестве $\Omega = M \times (0 < t_1 < \infty) \times \dots \times (0 < t_l < \infty)$. Асимптотическим решением исходной задачи (5) оказывается сужение асимптотического решения задачи $\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} = f$.

Определение 5. Функции вида (7), которые сингулярно возмущают задачу переводят в регулярную, будем называть регуляризирующими функциями.

Пусть семейство операторов L_ε является дифференцируемым (по Фре-ше) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и действует из одного банахова пространства в другое. Рассмотрим оператор L_0 .

Определение 6. Назовем производную $L_0'(u_0)$ оператора L_0 основным оператором (в точке u_0) семейства операторов L_ε и будем говорить, что основной оператор при заданной функции f обратим на бесконечности, если существует ограниченное решение u задачи $L_0'(u_0)u(x, t) = f(x, t)$ при $t_i \rightarrow +\infty$. В этом случае будем также говорить, что правая часть f принадлежит к классу допустимых правых частей основного оператора.

2. Решение задачи (1). Для сокращения записи обозначим совокупность векторов $(z; y) = x$. Ограничиваясь получением асимптотики не биржегофского типа, для рассматриваемой задачи достаточно ввести одну регуляризирующую функцию $\tau = t / \varepsilon$. Вместо функции $x(t, \varepsilon)$ будем изучать функцию $\tilde{x} = \tilde{x}(t, \tau, \varepsilon)$, причем $\tilde{x}(t, t / \varepsilon, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)$, где $x(t, \varepsilon)$ решение задачи (1). Тогда $\dot{x} = \partial \tilde{x} / \partial t + 1 / \varepsilon (\partial \tilde{x} / \partial \tau)$, и задача (1) будет переведена в следующую регулярную по ε задачу:

$$\varepsilon \partial \tilde{z} / \partial t + \partial \tilde{z} / \partial \tau = F(\tilde{z}, \tilde{y}, t), \quad z|_{\tau=0} = \psi_0(t), \quad \psi_0(0) = z^0, \quad (8)$$

$$\varepsilon \partial \tilde{y} / \partial t + \partial \tilde{y} / \partial \tau = \varepsilon f(\tilde{z}, \tilde{y}, t), \quad y|_{\tau=0} = \varphi_0(t), \quad \varphi_0(0) = y^0,$$

где $\psi_0(t)$, $\varphi_0(t)$ — произвольные пока вектор-функции.

Пусть

$$\tilde{x}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, \tau). \quad (9)$$

После известной в этом случае процедуры мы получаем задачи для определения коэффициентов ряда

$$\partial z_0 / \partial \tau = F_0, \quad z_0|_{\tau=0} = \psi_0(t), \quad \psi_0(0) = z^0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial y_0 / \partial \tau &= 0, \quad y_0|_{\tau=0} = \varphi_0(t), \quad \varphi_0(0) = y^0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial F_0}{\partial z} z_1 + \frac{\partial F_0}{\partial y} y_1 - \frac{\partial z_0}{\partial t}, \quad z_1|_{\tau=0} = \psi_1(t), \quad \psi_1(0) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\partial y_1 / \partial \tau = f_0 - \partial y_0 / \partial t, \quad y_1|_{\tau=0} = \varphi_1(t), \quad \varphi_1(0) = 0,$$

$$F_0 \equiv F(z_0(t, \tau), y_0(t, \tau), t).$$

Мы должны изучить решения систем (10), (11) и последующих в по-
луполосе $\Omega: 0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq \infty$ в пространствах C^k . Ограничиваясь
получением асимптотического решения $x_{en}(t, \tau)$, мы должны потребовать,
чтобы $x_i(t, \tau) \in C_{t, \tau}^{(n+1-i, 1)}[\bar{\Omega}]$.

Запишем решение второй системы в (10) в виде $y_0 = \varphi_0(t)$. Если бы
функция $\varphi_0(t)$ была известна, и мы решили первую систему в (10), то из-
вестно, что $z_0(t, \tau) \rightarrow \varphi(\varphi_0(t), t)$ при $\tau \rightarrow \infty$ ⁽²⁾.

Введем обозначение $f_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(z_0(t, \tau), \varphi_0(t), t) = f[\varphi(\varphi_0(t), t),$
 $\varphi_0(t), t]$ и перепишем вторую систему в (11) в виде $\partial y_1 / \partial \tau = f_0 - f_\infty -$
 $- [\varphi_0' - f_\infty]$. Функцию $\varphi_0(t)$ мы определим из условий

$$\varphi_0' - f_\infty = 0, \quad \varphi_0(0) = y^0, \quad (12)$$

так как разность $\varphi_0' - f_\infty$ не принадлежит к классу допустимых правых
членов оператора $\partial y_1 / \partial \tau$. Тогда система

$$\partial y_1 / \partial \tau = f_0 - f_\infty \quad (13)$$

будет иметь решение, ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$. Это решение удобнее за-
писать в виде

$$y_1(t, \tau) = \int_0^\tau (f_0 - f_\infty) d\tau + c_1(t). \quad (14)$$

Учитывая, что $y_1(0, 0) = 0$, получаем начальное условие для произ-
вольной пока функции $c_1(t)$, введенной взамен функции $\varphi_1(t)$:

$$c_1(0) = \int_0^\infty (f_0^0 - f_\infty^0) d\tau.$$

Подставив решение $\varphi_0(t)$ в первую систему в (10), находим $z_0(t, \tau)$,
которое затем подставляем в (13). Далее решение (14) подставляем в пер-
вую систему в (11), определяем $z_1(t, \tau)$ и весь дальнейший процесс полу-
чения функций $x_i(t, \tau)$ ($i = 2, \dots, n$) повторяется. Получив частичную
сумму S -формально асимптотического ряда

$$x_{en}(t, \tau) = x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \dots + \varepsilon^n x_n(t, \tau),$$

мы доказываем, что оно является асимптотическим решением, т. е. спра-
ведлива

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) вектор-функции F и f определены и непрерывны вместе с производ-
ными до $n + 2$ порядка в некоторой области V :

$a_i \leq z^i \leq b_i, c_j \leq y^j \leq d_j, 0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m;$

2) задача (12) однозначно разрешима на $[0, T]$, причем $c_j \leq \varphi_0^j(t) \leq d_j,$
 $\varphi_0(t) = \{\varphi_0^1, \dots, \varphi_0^m\};$

3) некоторый корень $z = \varphi(y, t)$ системы $F(z, y, t) = 0$ является изо-
лированным, асимптотически устойчивым в области $\mathfrak{D}: c_j \leq y^j \leq d_j,$
 $0 \leq t \leq T$; начальная точка $(z^0, y^0, t = 0)$ принадлежит области влияния
этого корня;

4) нулевое приближение $x_0(t, \tau)$, полученное выше, принадлежит обла-
сти V для всех $\tau \geq 0$;

5) корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют неравен-
ству (4) в области $\mathfrak{D}$, не изменяют своей кратности в $\mathfrak{D}$, причем или

$\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j) \geq 0$ или $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j) \leq 0$ при $i \neq j$.

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $x(t, \varepsilon)$ задачи

(1), которое вместе с полученным выше приближенным решением $x_{en}(t, \tau)$
удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \varepsilon) - x_{en}(t, t/\varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq c\varepsilon^{n+1},$$

где c не зависит от t и ε .

3. Формализм получения асимптотического решения в задаче 2. В качестве основного независимого переменного вводим «медленное» время $\tau = \varepsilon t$:

$$L_3 y \equiv \varepsilon dy/d\tau - \varepsilon \Upsilon(y, \tau/\varepsilon) = 0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0. \quad (2')$$

Теперь снова произведем расширение оператора L_ε с помощью введения новой независимой переменной $x = \tau/\varepsilon$ и изучения вместо функции $y(\tau, \varepsilon)$ новой функции $\tilde{y} = \tilde{y}(\tau, x, \varepsilon)$ так, чтобы $\tilde{y}(\tau, x, \varepsilon)|_{x=\tau/\varepsilon} = y(\tau, \varepsilon)$. Тогда расширенный оператор L_ε можно описать следующим образом:

$$L_\varepsilon \tilde{y} \equiv \varepsilon \partial \tilde{y} / \partial \tau + \partial \tilde{y} / \partial x - \varepsilon \Upsilon(\tilde{y}, x) = 0, \quad \tilde{y}|_{x=0} = c_0(\tau), \quad c_0(0) = y^0, \quad (15)$$

где $c_0(\tau)$ — пока произвольная функция.

Определяем решение в виде ряда $\tilde{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau, x)$. Для коэффициентов ряда получим следующие задачи:

$$\partial y_0 / \partial x = 0, \quad y_0|_{x=0} = c_0(\tau), \quad c_0(0) = y^0, \quad (16)$$

$$\partial y_1 / \partial x = \Upsilon(y_0, x) - \partial y_0 / \partial \tau, \quad y_1|_{x=0} = c_1(\tau), \quad c_1(0) = 0, \quad (17)$$

и т. д. Решением задачи (16) будет функция $y_0 = c_0(\tau)$. Подставив ее в систему (17), мы получаем систему $\partial y_1 / \partial x = \Upsilon(c_0(\tau), x) - c_0'(\tau)$ с элементарным основным оператором, и установить его обратимость при $x \rightarrow +\infty$ не составляет труда.

Если функция $\Upsilon(y, x)$ стремится при $x \rightarrow +\infty$ к некоторой предельной функции со скоростью экспоненты, то мы класс допустимых правых частей выделяем с помощью предельного перехода, как это делалось в предыдущей задаче со второй системой в (11). Однако, в общем случае функция $\Upsilon(y, x)$ может не иметь предела при $x \rightarrow \infty$, например, она может быть почти периодической по x . Тогда мы поступаем так, как это принято в методе усреднения. Пусть функция $\Upsilon(y, x)$ и ее производные по y таковы, что существуют средние, например,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \Upsilon(y, x) dx \right) = \bar{\Upsilon}(y).$$

Перепишем изучаемое уравнение в виде

$$\partial y_1 / \partial x = \Upsilon(c_0, x) - \bar{\Upsilon}(c_0) - [c_0'(\tau) - \bar{\Upsilon}(c_0(\tau))].$$

Для определения функции $c_0(\tau)$ полагаем

$$c_0'(\tau) = \bar{\Upsilon}(c_0), \quad c_0(0) = y^0, \quad (18)$$

а систему для определения функции $y_1(\tau, x)$ получаем уже в виде $\partial y_1 / \partial x = \Upsilon(c_0, x) - \bar{\Upsilon}(c_0)$, $y_1|_{x=0} = c_1(\tau)$, $c_1(0) = 0$, решение которой запишем

$$y_1(\tau, x) = \int_0^x \Upsilon_0(c_0, x) dx + c_1(\tau), \quad (19)$$

где $\Upsilon_0(c_0, x) = \Upsilon(c_0, x) - \bar{\Upsilon}(c_0)$.

Таким образом будет получено асимптотическое решение задачи (2) в виде функции: $y_{en}(\tau, t) = c_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau, t) + \dots + \varepsilon^n y_n(\tau, t)$, где $\tau = \varepsilon t$.

Московский энергетический институт

Поступило
7 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963. ² А. Б. Васильева, УМН, 18, в. 3 (111), 15 (1963). ³ В. М. Волосов, УМН, 17, в. 6, 3 (1962). ⁴ С. А. Ломов, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, в. 4, 884 (1968). ⁵ С. А. Ломов, Докл. научно-технич. конфер. Моск. энергетич. инст., секция матем., М., 1969, стр. 42. ⁶ В. П. Маслов, Теорет. и матем. физика, 1, 378 (1969). ⁷ А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 31 (73), 575 (1952). ⁸ С. А. Ломов, V международн. конфер. по нелинейным (тез. докл.), Киев, 1969.