Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 517.959.3 МАТЕМАТИКА

Р. И. КАЧУРОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 25 II 1970)

В работе получены теоремы существования, единственности и сходимости приближенных методов для трех задач механики.

1. Как показал А. А. Ильюшин [1] (см. также [2]), задача об изгибе пластинки при степенном условии упрочнения $\tau = k\gamma^n$ и допущении о несжимаемости материала описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными четвертого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[D_w\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]=P(x,y). \qquad (1)$$

Здесь w — прогиб средней плоскости пластинки; D_w — жесткость пластинки на изгиб; $D_w = D(h\xi)^{n-1}$, $D = 4kh^3/(n+2)$; $2h$ — толщина пластинки; k, n — постоянные числа;

$$\xi^2 = (\partial^2 w/\partial x^2)^2 + (\partial^2 w/\partial y^2)^2 + (\partial^2 w/\partial x\,\partial y)^2 + (\partial^2 w/\partial x^2)(\partial^2 w/\partial y^2); \qquad (2)$$

P — нагрузка, действующая на пластинку.

Л. М. Качанов [3] показал, что задача об упруго-пластическом изгибе плоской пластинки описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g(\xi^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[g(\xi^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[g(\xi^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]=f(x,y), \qquad (3)$$

где w — прогиб; g — функция, характерная для данного материала; ξ^2 — величина, определяемая формулой (2); $f(x, y)$ — величина, пропорциональная внешней нормальной нагрузке, рассчитанной на единицу площади.

Пусть Ω — область пластинки; S — ее контур. А. Лангенбах [4] и С. Г. Михлин [5] изучили вопрос о существовании решения последней задачи для случая пластинки, жестко закрепленной на краю. Жесткое закрепление порождает краевые условия

$$w|_S = \partial w/\partial x|_S = \partial w/\partial y|_S = 0. \qquad (4)$$

В [4, 5] на функцию g были наложены ограничения, среди них $g(t) > a \quad \forall t \geqslant 0$, $a = \mathrm{const} > 0$, которое, очевидно, не выполняется для уравнения (1).

Как показал Л. М. Качанов [6], задача об упруго-пластическом кручении упрочняющихся стержней описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными в области Ω с нулевым краевым условием на границе S

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar g(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\bar g(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\omega, \quad u|_S = 0. \qquad (5)$$

Здесь $T^2 = (\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2$; $\bar g(T^2)$ — функция, характерная для материала стержня в состоянии упрочнения; ω — угол закручивания стержня на единицу длины. Эта задача изучалась в работах [4, 5, 7].

В данной заметке изучена первая из указанных задач и продолжено изучение второй и третьей задач, начатое в ([4, 5, 7]). При этом используются идеи и результаты ([8–14]) и известные свойства функций $\bar{g}$, g из уравнений (3), (5).

2. Разрешимость задач, рассматриваемых в данной работе, эквивалентна разрешимости краевых задач (1)—(4), (3)—(4) и (5). Решения будут рассматриваться в пространствах С. Л. Соболева ([13]). Граница S области Ω предполагается кусочно-гладкой.

Теорема 1. *Задача об изгибе пластинки, жестко закрепленной на краю, при степенном условии упрочнения $\tau = k\gamma^n$ и допущении о несжимаемости материала имеет решение в пространстве $\mathring{W}_p^2(\Omega)$ при любой функции $P \in [\mathring{W}_p^2(\Omega)]^*$, если только $n \geqslant 1$ (здесь $p = n+1$). Это решение единственно в $\mathring{W}_p^2(\Omega)$.*

Условие 1. а) Функция $g(t)$ определена и непрерывна при всех $t \geqslant 0$; б) функция $g(t^2)t$ — возрастающая при $t \geqslant 0$; в) существует число p, $2 \leqslant p < \infty$, такое, что при всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство $a_0 + a_1 t^{p/2-1} \leqslant g(t) \leqslant A_0 + A_1 t^{p/2-1}$. Здесь a_0, a_1, A_0 A_1 — постоянные числа, $a_0 \geqslant 0$, $a_1 > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1. Тогда задача об упруго-пластическом изгибе плоской пластинки, жестко закрепленной на краю, имеет решение в пространстве $\mathring{W}_p^2(\Omega)$ при любой функции $f \in [\mathring{W}_p^2(\Omega)]^*$. Это решение единственно в $\mathring{W}_p^2(\Omega)$.*

Заметим, что если функция $g(t^2)t$ лишь неубывающая при $t \geqslant 0$, то разрешимость также будет иметь место.

Перейдем теперь к третьей задаче.

Условие 2. Существуют число $p \geqslant 2$, $p < \infty$, и постоянные $a_0 \geqslant 0$, $a_1 > 0$, A_0, A_1 такие, что при всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $a_0 + a_1 t^{p/2-1} \leqslant \bar{g}(t) \leqslant A_0 + A_1 t^{p/2-1}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 2. Тогда задача об упруго-пластическом кручении упрочняющихся стержней имеет решение в пространстве $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ при любой функции $\omega \in [\mathring{W}_p^1(\Omega)]^*$. Это решение единственно в $\mathring{W}_p^1(\Omega)$.*

Заметим, что если $\bar{g}(t) \leqslant A_2$ $\forall t \geqslant 0$, $A_2 = \mathrm{const} > 0$, то теорема 3 примет следующий вид.

Если $\bar{g}(t) \leqslant A_2 = \mathrm{const}$, $A_2 > 0$ для всех $t \geqslant 0$, то задача об упруго-пластическом кручении упрочняющихся стержней имеет решение в пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ при любой $\omega \in [\mathring{W}_2^1(\Omega)]^*$. Это решение единственно в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Справедливость этого вытекает из того, что, как хорошо известно, $\bar{g}(t) \geqslant B_2 = \mathrm{const} > 0$ для всех $t \geqslant 0$.

3. Для нахождения решения рассмотренных задач можно применять различные приближенные методы. Ниже получены теоремы, показывающие, что при определенных условиях можно утверждать сходимость метода Галеркина. В доказательстве всех дальнейших теорем существенно используется следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть X — рефлексивное сепарабельное банахово пространство; F: $X \to X^*$ — определенный во всем X монотонный коэрцитивный оператор (определение этих терминов см. в ([9])), переводящий сильно сходящиеся последовательности из X в слабо сходящиеся последовательности из X^* и ограниченные множества из X в ограниченные множества из X^*. Пусть уравнение $F(u) = \theta$ имеет единственное решение u_0 в пространстве X. Тогда:* а) *при любом натуральном m существует хотя бы одно галеркинское приближение a_0^m для решения уравнения $F(u) = \theta$;* б) *последовательность $\{a_0^m\}$ (a_0^m — любое галеркинское приближение при данном m) сходится слабо к решению u_0.*

Поясним подробнее, что означает a_0^m. Пусть $u^1, \ldots, u^m, \ldots$ — полная система в X. Рассмотрим m скалярных уравнений с m неизвестными $a_1, \ldots, a_m$, т. е. систему

$$\left(F\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u^i\right), u^j\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\{a_1^0, \ldots, a_m^0\}$ — какое-либо решение этой системы. Тогда $a_0^m = \sum_{i=1}^{m} a_i^0 u^i$. Вообще говоря, a_0^m определяется не единственным образом.

Теорема 5. *В задаче об изгибе пластинки, жестко закрепленной на краю, при степенном условии упрочнения* $\tau = k\gamma^n$, $n \geqslant 1$, *и допущений о несжимаемости материала имеют место утверждения:* а) *при любой функции* $P \in [\mathring{W}_p^2(\Omega)]^*$, $p = n + 1$, *при любом натуральном* m *найдется хотя бы одно галеркинское приближение* a_0^m *для решения* $w_0 \in \mathring{W}_p^2(\Omega)$ *нашей задачи;* б) *последовательность* $\{a_0^m\}$ (a_0^m — *любое галеркинское приближение при данном* m) *сходится в метрике пространства* $\mathring{W}_p^2(\Omega)$ *к решению* w_0.

Для доказательства этого предложения, кроме теоремы 4, используется специальная нормировка пространства $\mathring{W}_p^2(\Omega)$ и

Лемма. *Если* H — *гильбертово пространство, то для любых элементов* $x, y \in H$ *и любого числа* $\mu \geqslant 2$ *имеет место неравенство* $\frac{1}{2}\|x\|^\mu + \frac{1}{2}\|y\|^\mu - \|(x+y)/2\|^\mu \geqslant \|(x-y)/2\|^\mu$.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда в задаче об упругопластическом изгибе плоской пластинки, жестко закрепленной на краю, имеют место утверждения:* а) *при любой функции* $f \in [\mathring{W}_p^2(\Omega)]^*$ *и любом натуральном* m *найдется хотя бы одно галеркинское приближение* a_0^m *для решения* $u_0 \in \mathring{W}_p^2(\Omega)$ *нашей задачи;* б) *последовательность* $\{a_0^m\}$ (a_0^m — *любое галеркинское приближение при данном* m) *сходится слабо в пространстве* $\mathring{W}_p^2(\Omega)$ *к решению* u_0 *нашей задачи.*

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* 2. *Тогда в задаче об упругопластическом кручении упрочняющихся стержней имеют место утверждения:* а) *при любой функции* $\omega \in [\mathring{W}_p^1(\Omega)]^*$ *и любом натуральном* m *найдется хотя бы одно галеркинское приближение* a_0^m *для решения* $u_0 \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ *нашей задачи;* б) *последовательность* $\{a_0^m\}$ (a_0^m — *любое галеркинское приближение при данном* m) *сходится слабо в пространстве* $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ *к решению* u_0 *нашей задачи.*

Отметим еще, что при более жестких ограничениях на функции g, $\bar{g}$ в теоремах 6, 7 можно было бы получить утверждения о сильной сходимости галеркинских приближений.

Всесоюзный заочный электротехнический
институт связи
Москва

Поступило
19 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Ильюшин, Пластичность, 1948. [2] В. В. Соколовский, Теория пластичности, 1969. [3] Л. М. Качанов, Некоторые вопросы теории ползучести, 1949 [4] А. Лангенбах, ДАН, 121, № 2, 214 (1958). [5] С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, 1966. [6] Л. М. Качанов, Основы теории пластичности, 1956. [7] А. И. Кошелев, ДАН, 99, № 3, 357 (1954). [8] М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. общ., 12 (1963). [9] Р. И. Качуровский, УМН, 23, № 2, 121 (1968). [10] Р. И. Качуровский, ДАН, 183, № 1, 33 (1968). [11] Р. И. Качуровский, ДАН, 189, № 1 (1969). [12] F. E. Browder, Bull. Am. Math. Soc., 69, № 6, 862 (1963). [13] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [14] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, 1953.