Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (114), 2019

УДК 512.542

Производная p-длина p-разрешимой группы с ограниченными факторами

Д.В. Грицук[1], А.А. Трофимук[2]

Установлена функциональная зависимость оценки производной p-длины p-разрешимой группы от величины индексов фиттинговых p-подгрупп в своих нормальных замыканиях. Получены оценки производной p-длины p-разрешимой группы, у которой кофакторы примарных подгрупп ограничены.
Ключевые слова: конечная группа, p-разрешимая группа, кофактор, фиттинговая p-подгруппа, производная p-длина, нормальное замыкание.

The functional dependence of the estimate of the derived p-length of a p-soluble group on the value of the indexes of Fitting p-subgroups in its normal closures is determined. The estimations of the derived p-length of a p-soluble group with limited cofactors of primary subgroups are obtained.
Keywords: finite group, p-soluble group, cofactor, Fitting p-subgroup, derived p-length, normal closure.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1]–[2].

В 1956 г. Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] предложили понятие p-длины p-разрешимой группы и исследовали ее зависимость от некоторых инвариантов силовской p-подгруппы. Данная работа определила одно из основных направлений в изучении p-разрешимых групп – установление взаимосвязи между мерой сложности силовской p-подгруппы p p-разрешимой группы G и ее p-длиной.

Элементарная теория p-длины изложена в монографии Хупперта [1], [4]. Оценки p-длины p-разрешимой группы в зависимости от инвариантов пересечений силовских p-подгрупп найдены в работе А.Г. Анищенко и В.С. Монахова в 1977 г. [5].

На произвольные группы понятие p-длины распространил Л.А. Шеметков и доказал, что p-длина любой группы не превышает минимального числа образующих ее силовской p-подгруппы [6]. Для p-разрешимых групп этот факт приводится в [1].

В 2006 г. В.С. Монахов [7] предложил понятие производной p-длины p-разрешимой группы, как аналог производной длины для p-разрешимых групп. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом,

$$G = G_n \supseteq G_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq G_2 \supseteq G_1 \supseteq G_0 = 1, \qquad (1)$$

факторы которого являются либо p'-группами, либо абелевыми p-группами. Наименьшее число абелевых p-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p-длиной группы G и обозначается через $l_p^a(G)$. Ясно, что производная p-длина p-группы совпадает с ее производной длиной. Начальные свойства производной p-длины получены в работах [8]–[11]. В частности, в работе [8] доказано, что производная p-длина p-разрешимой группы с абелевой силовской p-подгруппой не превышает 1. В [10] получена оценка производной p-длины p-разрешимой группы с бициклической силовской p-подгруппой. В работе [11] установлена функциональная зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка силовской p-подгруппы.

Вполне естественно возникает вопрос о влиянии свойств факторов p-разрешимой группы на ее производную p-длину. Изучению данного вопроса посвящена настоящая заметка.

1. Производная p-длина p-разрешимой группы, с ограниченными индексами фиттинговых p-подгрупп в своих нормальных замыканиях. Главным рядом группы G называется цепочка подгрупп (1), в которой для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ подгруппа G_i/G_{i-1} является минимальной нормальной подгруппой в группе G/G_{i-1}. Фактор-группы G_i/G_{i-1} называются главными факторами группы G.

Пусть p – простое число. Если G – p-разрешимая неединичная группа, то ее главные факторы являются либо p-группами, либо p'-группами. Главный фактор группы G, который является p-группой, называется p-главным фактором группы G. Если p^n – наибольший из порядков p-главных факторов группы G, то n называют p-рангом группы G и обозначают через $r_p(G)$ [1, с. 685].

Разрешимая группа p-разрешима для каждого p. Рангом неединичной разрешимой группы G называют $\max_{p\in\pi(G)} r_p(G)$. Здесь $\pi(G)$ – совокупность всех простых делителей порядка группы G. Ранг разрешимой группы G обозначают через $r(G)$.

Пусть H и K – нормальные подгруппы группы G. Напомним, что фактор-группа H/K называется фиттинговой, если $H \subseteq F(G)$. Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G.

Хупперт [12] показал, что разрешимая группа тогда и только тогда является сверхразрешимой, когда фиттинговы главные факторы имеют простые порядки. Я.Г. Беркович [13] продолжил исследования в данном направлении и обнаружил, что разрешимая группа имеет главный ранг, не превосходящий 2, тогда и только тогда, когда порядки ее фиттинговых главных факторов свободны от кубов. В работе [14] получены новые свойства разрешимых групп главного ранга 2 и проведено полное изучение разрешимых группы главного ранга 3. Бэр [15, VI. 9.9] установил, что если на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга, факторы имеют простые порядки, то группа сверхразрешима. В 1978 г. Гашюц [16, следствие 6] установил справедливость следующего утверждения: *если H/K – главный фактор наибольшего порядка разрешимой группы G, то подгруппа $H \le F(G)$.* Развивая этот результат, В.С. Монахов [17, теорема 2] доказал существование в разрешимых группах фиттинговых главных факторов порядка $p^{r(G/\Phi(G))}$, где p – простое число, $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, $r(G/\Phi(G)$ – главный ранг группы $G/\Phi(G)$.

Исследование влияния Фиттинговых факторов на строение группы также проведено в работах [18]–[21]. Например, в [18] найдена зависимость оценки производной длины разрешимой группы от порядков силовских подгрупп из ее подгруппы Фиттинга, в [19] получены оценки инвариантов разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга, силовские подгруппы факторов являются бициклическими, в [20] исследованы разрешимые группы с нормальным рангом подгруппы Фиттинга, не превышающим 2.

Результаты работы [21] были распространены на p-разрешимый случай.

Пусть G – p-разрешимая группа. Рассмотрим функцию

$$t_p^F(G) = \max\{n \mid p^n \mathrm{T} \mid H^G : H \mid,\ H \le F_p(G)\},\ p \in \pi(G).$$

Следуя Хупперту, будем использовать запись $p^m \mathrm{T} \mid H^G : H \mid$ для обозначения того, что p^m делит $\mid H^G : H \mid$, а p^{m+1} не делит $\mid H^G : H \mid$. Кроме того, H^G – наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая H, а $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G.

Теорема 1.1. *Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда* $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \dfrac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 6}{4}$ *при* $p \notin \{2,3\}$ *и* $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \dfrac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 8}{4}$ *при* $p \in \{2,3\}$.

Доказательство. Предположим, что $\Phi(G)\neq 1$. Пусть $H/\Phi(G)\leq F_p(G/\Phi(G))$ такая, что

$$p^{t_p^F(G/\Phi(G))} \mathrm{T}\, |(H/\Phi(G))^{G/\Phi(G)}:H/\Phi(G)|.$$

Так как $|(H/\Phi(G))^{G/\Phi(G)}:H/\Phi(G)|=|H^G:H|$, то $p^{t_p^F(G/\Phi(G))}$ делит $|H^G:H|$. Так как $F_p(G/\Phi(G))=F_p(G)/\Phi(G)$, то $H\leq F_p(G)$. Поэтому $t_p^F(G/\Phi(G))\leq t_p^F(G)$. Значит, условие теоремы наследует фактор-группа $G/\Phi(G)$. Так как $\Phi(G/\Phi(G))=1$, то по индукции $l_p^a(G/\Phi(G))\leq \dfrac{(t_p^F(G))^2+t_p^F(G)+6}{4}$, если $p\notin\{2,3\}$, и $l_p^a(G/\Phi(G))\leq \dfrac{(t_p^F(G))^2+t_p^F(G)+8}{4}$, если $p\in\{2,3\}$.

Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G)=1$. Очевидно также, что $O_{p'}(G)=1$.

Таким образом, $F_p(G)=F(G)=O_p(G)$ и по [22, лемма 1.8.19] $C_G(F_p(G))\subseteq F_p(G)$. Кроме того $F=F_p(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных p-подгрупп N_i группы G, где $1\leq i\leq k$. Значит, $F_p(G)$ абелева и $C_G(F_p(G))=F_p(G)$. Очевидно, что для каждого N_i верно, что фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(N_i)$. По [2, лемма 2.33] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(N_i)$, $1\leq i\leq k$. Кроме того

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i)=C_G(F)=F,\quad G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i)=G/F.$$

По [8, лемма 2] справедливо

$$l_p^a(G/F)=l_p^a(G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i))=\max\{l_p^a(G/C_G(N_1)),\ldots,l_p^a(G/C_G(N_k))\}.$$

Пусть N_i – элементарная абелева p-подгруппа порядка p^{m_i}. Пусть H – подгруппа простого порядка в N_i. Так как N_i нормальная примарная группа, то $H\leq F_p(G)$ и $p^{1+t_p^F(G)}$ не делит $|H^G:H|$. Поскольку N_i – минимальная нормальная подгруппа, то $N_i=H^G$ и $|H^G:H|=p^{m_i-1}$. Поэтому $1+t_p^F(G)>m_i-1$ или $m_i\leq 1+t_p^F(G)$. Тогда $G/C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе группы $GL(1+t_p^F(G),p)$.

Так как силовская p-подгруппа группы $GL(1+t_p^F(G),p)$ имеет порядок $p^{t_p^F(G)}\cdot\ldots\cdot p=p^{\frac{(t_p^F(G)+1)t_p^F(G)}{2}}$, то из [11, теорема 3.1]вытекает, что

$$l_p^a(G/C_G(N_i))\leq\frac{\frac{(t_p^F(G)+1)t_p^F(G)}{2}+1}{2}=\frac{(t_p^F(G))^2+t_p^F(G)+2}{4},\ \text{если } p\notin\{2,3\}, \text{ и}$$

$$l_p^a(G/C_G(N_i))\leq 1+\frac{\frac{(t_p^F(G)+1)t_p^F(G)}{2}}{2}=\frac{(t_p^F(G))^2+t_p^F(G)+4}{4},\ \text{если } p\in\{2,3\}.$$

Так как F абелева, то из [11, теорема 3.1] следует, что

$$l_p^a(G) \le \frac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 2}{4} + 1 = \frac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 6}{4}, \text{ если } p \notin \{2,3\}, \text{ и}$$

$$l_p^a(G) \le \frac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 4}{4} + 1 = \frac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 8}{4}, \text{ если } p \in \{2,3\}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.1. *Если для* p*-разрешимой группы* G *значение* $t_p^F(G)$ *не превышает 1, то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \le 2$.

Следствие 1.2. *Если для* p*-разрешимой группы* G *значение* $t_p^F(G)$ *не превышает 2, то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \le 3$.

2. Производная p**-длина** p**-разрешимой группы, у которой кофакторы** p**-подгрупп ограничены.** Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. В частности, при $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов.

В.С. Монахов [23] установил зависимость инвариантов разрешимой группы от порядков её силовских подгрупп: *если порядок разрешимой группы* G *не делится на* $(n+1)$*-е степени простых чисел, то производная длина группы* $G/\Phi(G)$ *не превышает* $3+n$. В частности, если порядки силовских подгрупп разрешимой группы G свободны от квадратов, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Очевидно, что если порядок примарной группы свободен от квадратов, то группа является циклической. Из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] следует, что коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Поэтому производная длина группы, у которой порядки силовских подгрупп свободны от квадратов, не превышает 2.

Развитием отмеченных выше результатов на случай частично разрешимых групп является работа [24], в которой исследованы p-разрешимые группы, у которых силовские p-подгруппы циклические. В частности, показано, что производная p-длина таких p-разрешимых групп не превышает 1.

Напомним, что кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $H/\mathrm{Core}_G H$, где $\mathrm{Core}_G H$ – ядро подгруппы H в группе G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H. В дальнейшем кофактор подгруппы H в группе G будем обозначать $\mathrm{Cof}_G(H)$.

В [25] изучено строение группы с циклическими кофакторами примарных подгрупп. В частности, доказано, что p-длина таких групп не превышает 1 для всех простых p. Строение разрешимых групп с бициклическими кофакторами примарных подгрупп приведено в [26]. Из следствия 4.2 работы [25] и основной теоремы работы [27] следует описание групп с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов. В частности, производная длина такой группы G не превышает 4, нильпотентная длина не превышает 3, а p-длина не превышает 1 для всех простых p. В работе [28] получены оценки инвариантов разрешимой группы с ограниченными порядками кофакторов субнормальных подгрупп.

Вполне естественно развить рассмотренные выше результаты, связанные с кофакторами подгрупп, на случай p-разрешимых групп. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если в* p*-разрешимой группе* G *порядок* $\mathrm{Cof}_G(X)$ *свободен от* $(n+1)$*-степеней, где* X *– произвольная* p*-подгруппа группы* G*, то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \dfrac{n^2+n+2}{4}$ *при* $p \notin \{2,3\}$ *и* $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \dfrac{n^2+n+4}{4}$ *при* $p \in \{2,3\}$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Покажем, что каждая фактор-группа G/N наследует условия теоремы. Пусть $\overline{P}=P/N$ – произвольная p-подгруппа группы $\overline{G}=G/N$. Тогда $N\le P\le G$ и по [27, лемма 2]

$$\mathrm{Cof}_{\overline{G}}(\overline{P})=\overline{P}/\mathrm{Core}_{\overline{G}}\overline{P}\cong(P/N)/(\mathrm{Core}_G P/N)\cong P/\mathrm{Core}_G P\cong\mathrm{Cof}_G(P).$$

Пусть P_1 – силовская p-подгруппа группы P. Тогда $P=P_1N$. Очевидно, что $N\le \mathrm{Core}_G P$ и $\mathrm{Core}_G P_1\le \mathrm{Core}_G P$. Тогда

$$\mathrm{Cof}_G(P)=P/\mathrm{Core}_G P=P_1N/\mathrm{Core}_G P=P_1\mathrm{Core}_G P/\mathrm{Core}_G P\cong P_1/P_1\cap \mathrm{Core}_G P\cong$$

$$\cong(P_1/\mathrm{Core}_G P_1)/(P_1\cap \mathrm{Core}_G P/\mathrm{Core}_G P_1)\cong \mathrm{Cof}_G(P_1)/\overline{S_1},$$

где $\overline{S_1}=P_1\cap\mathrm{Core}_G P/\mathrm{Core}_G P_1$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ – класс всех групп, у которых порядки кофакторов примарных подгрупп свободны от n-ых степеней. Так как P_1 – p-подгруппа группы G, то по условию $\mathrm{Cof}_G(P_1)\in\mathfrak{F}$. Тогда $\mathrm{Cof}_G(P)\in\mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Значит, $\mathrm{Cof}_{\overline{G}}(\overline{P})\in\mathfrak{F}$. Поэтому по [8, лемма 4] в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа N, $F(G)=O_p(G)$ и $C_G(F(G))\subseteq F(G)$.

Предположим, что $\Phi(G)\ne 1$. Тогда $\Phi(G/\Phi(G))=1$ и по индукции

$$l_p^a(G/\Phi(G))=l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))\le\frac{n^2+n+2}{4},\text{ если } p\notin\{2,3\}\text{, и}$$

$l_p^a(G/\Phi(G))=l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))\le\dfrac{n^2+n+4}{4}$, если $p\in\{2,3\}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G)=1$, $N=F(G)=O_p(G)$ и $C_G(F(G))=F(G)$.

Пусть M – максимальная подгруппа в N. Тогда $|N:M|=p$. Так как $\mathrm{Core}_G M$ – наибольшая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в M, то $\mathrm{Core}_G M=1$ и $M\cong M/\mathrm{Core}_G M$. Поскольку M – p-подгруппа, то $|M|\le p^{n-1}$, так как порядки кофакторов p-подгрупп свободны от n-степеней. Поэтому $|N|\le p^n$.

Очевидно, что фактор-группа G/N изоморфна подгруппе группы $GL(n,p)$, силовская p-подгруппа которой имеет порядок $p^{n-1}\cdot\ldots\cdot p$. Поэтому порядок силовской p-подгруппы P делит $p^{\frac{(n+1)n}{2}}$. Тогда из [11, теорема 3.1] вытекает, что группа G удовлетворяет оценкам из заключения теоремы, противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть G – p-разрешимая группа. Если порядок $\mathrm{Cof}_G(X)$ свободен от квадратов, где X – произвольная p-подгруппа группы G, то $l_p^a(G/\Phi(G))\le 2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф17М-063).

Литература

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967. – 794 p.

2. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

3. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – V. 3, № 7. – P. 1–42.

4. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1982. – 532 p.

5. Анищенко, А.Г. Центральные пересечения и p-длина p-разрешимых групп / А.Г. Анищенко, В.С. Монахов // Доклады АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 11. – С. 968–971.

6. Шеметков, Л.А. О частично разрешимых конечных группах / Л.А. Шеметков // Математический сборник. – 1967. – Т. 72, № 1. – С. 97–107.

7. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

8. Грицук, Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

9. Грицук, Д.В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы математики, физики и техники. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 61–66.

10. Грицук, Д.В. Производная π-длина π-разрешимой группы, силовсик p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 54–58.

11. Грицук, Д.В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 58–60.

12. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Bd. 60. – S. 409–434.

13. Беркович, Я.Г. О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Мат. сб. – 1967. – Т. 74 (116), № 1. – С. 75–92.

14. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

15. Baer, R. Supersolvable immersion / R. Baer // Can. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.

16. Gashutz, W. Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflosbaren Gruppen durch gewisse Indexschranken definiert sind / W. Gashutz // J. Algebra. – 1978. – V. 53, № 2. – P. 389–394.

17. Монахов, В.С. К теореме Хупперта-Шеметкова / В.С. Монахов // Труды института математики НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 64–66.

18. Трофимук, А.А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А.А. Трофимук // Математические заметки. – 2010. – № 87. – С. 287–293.

19. Трофимук, А.А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 304–307.

20. Trofimuk, A.A. Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup / A.A. Trofimuk // Asian-European Journal of Mathematics. – 2016. – 1650037 (6 pages).

21. Трофимук, А.А. О Фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы / А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 242–246.

22. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

23. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

24. Monakhov, V.S. On derived π-length of a finifte π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – V. 16, № 2. – P. 233–241.

25. Liu, Y. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / Y. Liu, X. Yi // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2011. – V. 34, № 2. – P. 337–344.

26. Трофимук, А.А. Конечные разрешимые группы с бициклическими кофакторами примарных подгрупп / А.А. Трофимук, Д.Д. Даудов // НАН Беларуси. Труды Института математики. – 2016. – Т. 24, № 1. – С. 95–99.

27. Евтухова, С.М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С.М. Евтухова, В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 26–29.

28. Monakhov, V.S. On cofactors of subnormal subgroups / V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – V. 15, № 9. – P. 1650169-1–1650169-9.

[1]Брестский государственный
университет им. А.С. Пушкина

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 02.02.2019