Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948.34

М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (M. N. OĞUZTÖRELI), Д. И. МАНЖЕРОН (D. I. MANGERON)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР. О РЕШЕНИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 IX 1970)

1. Параллельно с систематической разработкой современного изложения начал математики [1] значительное количество исследований в последнее время посвящается новым отделам математики сложных структур, особенно сложным структурам теории и приложений математических уравнений. Сюда относятся, например, работы М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе [2], М. Пиконе [3], М. Кучма [4], Р. Беллмана [5] и др.

Авторы этой заметки, возможно, впервые начали исследование математических систем весьма сложных структур, как например, интегро-дифференциальных уравнений — линейных и нелинейных — с поливолновыми, полигармоническими и политепловыми операторами с наследственностью и отклоняющимися аргументами, причем поливолновые уравнения были названы некоторыми советскими, итальянскими, французскими и американскими исследователями «уравнениями Манжерона» [6–12].

Ниже приводятся решения одного класса линейных интегро-дифференциальных функциональных уравнений.

2. Рассмотрим уравнение

$$f^{(m)}(x+y,t)=Q(t)+\lambda\int_0^t K(t,\tau)\left[f^{(n)}(x,\tau)+f^{(n)}(y,\tau)\right]d\tau, \tag{2.1}$$

где $Q(t)$ и $K(t,\tau)$ — известные непрерывные функции от входящих в них переменных, λ — параметр, а $f(x,t)$ — дифференцируемая по x сколько угодно раз и непрерывная по t функция, причем для простоты записи примято

$$f^{(k)}(x,t)=\partial^k f(x,t)\,/\,\partial x^k,\quad k=1,2,\ldots \tag{2.2}$$

Учитывая обозначение

$$f^{(k)}(0,t)=\Phi_k(t), \tag{2.3}$$

уравнение (2.1) при $x=y=0$ приводим к виду

$$\Phi_m(t)=Q(t)+2\lambda\int_0^t K(t,\tau)\,\Phi_n(\tau)\,d\tau. \tag{2.4}$$

Так как по предположению $f^{(\nu)}(x,\alpha)$, $\nu=\max\{m,n\}$, — интегрируемая функция по отношению к x для любого t, то $f^{(\nu+1)}(x,t)$ существует. Беря производную уравнения (2.1) по x, получаем

$$f^{(m+1)}(x+y,t)=\lambda\int_0^t K(t,\tau)\,f^{(n+1)}(x,\tau)\,d\tau\equiv C_{m+1}(t,\lambda), \tag{2.5}$$

где $C_{m+1}(t,\lambda)$ — пока что не известная функция от t и λ и не зависимая от x, y.

Интегрируя уравнение

$$f^{(m+1)}(x, t) = C_{m+1}(t, \lambda) \tag{2.6}$$

$m + 1$ раз по отношению к x, получаем

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{m+1} C_k(t, \lambda)\, x^k/k!, \tag{2.7}$$

где $C_k(t, \lambda)$ зависят лишь от t и λ. Для определения $C_k(t, \lambda)$ подставим (2.7) в (2.1).

Теорема 1. *При сделанных раньше предположениях, касающихся функций, входящих в* (2.1), *и* $m < n$ *решение уравнения* (2.1) *записывается в виде*

$$f(x, t) = Q(t)\, x^m/m! + \sum_{k=0}^{m-1} C_k(t, \lambda)\, x^k/k!, \tag{2.8}$$

где $C_k(t, \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, *произвольные непрерывные функции от* t *и* λ.

Теорема 2. *При сделанных раньше предположениях, касающихся функций, входящих в* (2.1), *и* $m = n$ *решение уравнения* (2.1) *записывается в виде*

$$f(x, t) = \Phi_m(t)\, x^m/m! + \sum_{k=0}^{m-1} C_k(t, \lambda)\, x^k/k!, \tag{2.9}$$

где $C_k(t, \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$,*— произвольные непрерывные функции от* t *и* λ, *а* $\Phi_m(t)$ *— решение неоднородного линейного интегрального уравнения типа Вольтерра* (2.4), *соответствующего случаю* $m = n$.

Теорема 3. *При ранее сделанных предположениях, касающихся функций, входящих в* (2.1), *и* $m > n$ *решение уравнения* (2.1) *записывается в виде*

$$f(x, t) = C_n(t, \lambda) x^n / n! + C_m(t, \lambda) x^m / m!, \tag{2.10}$$

где $C_n(t, \lambda)$ *— единственное решение интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода*

$$2\lambda \int_0^t K_1(t, \sigma)\, C_n(\sigma, \lambda)\, d\sigma = - \int_0^t K(t, \tau)\, Q(\tau)\, d\tau, \tag{2.11}$$

причем

$$K_1(t, \sigma) = \int_\sigma^t K(t, \tau)\, K(\tau, \sigma)\, d\tau \tag{2.12}$$

и

$$C_m(t, \lambda) = Q(t) + 2\lambda \int_0^t K(t, \sigma)\, C_n(\sigma, \lambda)\, d\tau. \tag{2.13}$$

3. Авторы полагают, что представляет интерес решение задачи, отвечающей, например, функциональным интегро-дифференциальным уравнениям с поливолновыми операторами

$$\frac{\partial^{2m} f(x + y, u + v, t)}{\partial x^m \partial u^m} = Q(t) + \lambda \int_0^t K(t, \tau) \left[\frac{\partial^{2n} f(x, u, \tau)}{\partial x^n \partial u^n} + \frac{\partial^{2n} f(y, v, \tau)}{\partial y^n \partial v^n}\right] d\tau \tag{3.1}$$

или же

$$\frac{\partial^{2m} f(x + y, u + v, t)}{\partial x^m \partial u^m} \pm \frac{\partial^{2m} f(x - y, u - v, t)}{\partial x^m \partial u^m} =$$

$$= Q(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \left[\frac{\partial^{2n} f(x, u, \tau)}{\partial x^n \partial u^n} + \frac{\partial^{2n} f(y, v, \tau)}{\partial y^n \partial v^n}\right] d\tau \tag{3.2}$$

и их обобщениям на любое число независимых переменных, и, в особенности, отыскание явлений природы, математическими моделями которых могли бы служить системы сложной структуры.

Университет провинции Альберта
Эдмонтон, Канада

Ясский политехнический институт
Социалистическая республика Румыния

Поступило
1 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Dieudonne, Math. Monthly, **77**, 134 (1970). [2] M. A. Лаврентьев, A. B. Бицадзе, ДАН, **70**, 373 (1950). [3] M. Picone, Mauro Picone, Ann. Accad. Naz. Dei, **40**, 1 (1968). [4] M. Kuczma, Functional Equations in a Single Variable, Warszawa, 1969. [5] R. Bellman, L. E. Cooke, Differential-difference Equations, N.Y.— London, 1963. [6] D. Mangeron, L. E. Krivosheine, Rev. Roumaine Sci. Techn., Mecanique Appl., 9, 1195 (1964); **10**, 3 (1965). [7] D. Mangeron, L. E. Krivosheine, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **33**, 226 (1963); **34**, 344 (1964); **35**, 341 (1965). [8] D. Манжерон, Сообщ. АН Груз.ССР, **33**, 521 (1964). [9] M. N. Oğuztöreli, Time-lag Control Systems. N. Y.— London, 1966. [10] D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, Rend. Accad. Naz. Dei Lincei, Cl. Sci. Fis., Mat. E. Nat., Ser. 8, **45**, 1, 142, 236 (1968); **44**, 497, 713 (1968). [11] F. S. Rossi, Bull. Polytechn. Inst. Iassy, N.S., **9**(**13**), 3—4, 39 (1963). [12] G. Birkhoff, Approximations With Special Emphasis on Spline Functions, N. Y.— London, 1969. [13] V. Volterra, Opere Matematiche. Accad. Naz. Dei Lincei. Consiglio Naz. Del. Ricerche, Roma, 1954. [14] И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, М.— Л., 1951.