Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 519.513 *МАТЕМАТИКА*

В. А. НЕПОМНЯЩИЙ

РУДИМЕНТАРНЫЕ ПРЕДИКАТЫ И ТЬЮРИНГОВЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 8 IV 1970)

1. Введение. В важных конструкциях теории алгоритмов, таких как нормальная форма Клини, протоколы машин Тьюринга и т. п., вместо класса примитивно-рекурсивных предикатов часто употребляют более узкие классы. Такие классы получают как ограничениями на рекурсивные схемы вычислений предикатов (классы ограниченно-арифметических (**Ap**) предикатов [1], конструктивно-арифметических (**K**), рудиментарных (**R**), s-рудиментарных ($\mathbf{R}_s$) предикатов [2]), так и ограничениями на параметры тьюринговых вычислений (классы предикатов, вычислимых на машинах Тьюринга с логарифмическим замедлением (**Log**) [3], с метками (**M**) [4], в реальное время (T) [5]). В [6] указано, что для аналогичных целей можно употреблять класс $\mathbf{R}_s^{\log}$, полученный ограничениями обоих типов. Для родственных конструкций в [7] (§ 33) используется класс контекстно-свободных языков ($\mathbf{L}_{\text{кс}}$). Из [2] вытекает, что $\mathbf{Ap} \supseteq \mathbf{K} \supseteq \mathbf{R} \supseteq \mathbf{R}_s$. В [2], стр. 92, анонсирован следующий результат Беннетта: $\mathbf{K} = \mathbf{R} \supset \mathbf{R}_s$. В [6] указано, что $\mathbf{R}_s^{\log} \subset \mathbf{R}_s \subset \mathbf{M}$. Из [2, 3, 8] следует, что все вышеупомянутые классы предикатов (кроме класса примитивно-рекурсивных предикатов) входят в класс предикатов, вычислимых на машинах Тьюринга с линейной емкостью, а также, что **K** входит в наименьший класс иерархии Гжегорчика [9]. В связи с перечисленными фактами естественно возникает ряд вопросов. Отметим те из них, которые исследуются в данной работе.

1. Поскольку классы **R** и **Log** получаются ограничениями различного типа и $\mathbf{R} \not\subseteq \mathbf{Log}$, возникает гипотеза, что они несравнимы (т. е. $\mathbf{Log} \not\subseteq \mathbf{R}$). Верно ли это? Аналогичный вопрос для тех случаев, когда **Log** заменяется **M**, T или $\mathbf{L}_{\text{кс}}$.

2. Класс **Ap** порождается более мощными операциями, чем **R**. Является ли **Ap** более широким, чем **R**?

3. Справедливо ли, что $(\mathbf{Log} \cap \mathbf{M} \cap T \cap \mathbf{L}_{\text{кс}}) \subseteq \mathbf{R}_s$?

4. Все предикаты из $\mathbf{R}_s$, указанные в [2], определяются в неарифметических терминах (например, «x есть подслово y» и т. д.). Содержатся ли в $\mathbf{R}_s$ простейшие арифметические предикаты (например, $y = x + 1$, $x \leqslant y$)?

Оказывается, что ответы на все вопросы 1—4 отрицательны. При получении ответов на вопросы 1, 2 основную роль играет теорема 1. В ней дается достаточное условие рудиментарности предикатов в терминах ограничений на параметры вычислений предикатов на двуленточных машинах Тьюринга из [10].

2. Двуленточные машины Тьюринга. Рассматриваются машины Тьюринга $\mathfrak{M}$ с входной и рабочей лентами [10, 11]. Программа $\mathfrak{M}$ состоит из команд вида $q_i m_j m_k \to q_{i'} m_{k'} s_\rho' s_\mu''$, которые интерпретируются так: если $\mathfrak{M}$ находится в состоянии q_i и считывает на входной ленте символ m_j, а на рабочей символ m_k, то она переходит в состояние $q_{i'}$, записывает на рабочей ленте $m_{k'}$ и сдвигает входную (рабочую) головку в направлении s_ρ' (s_μ'') на одну ячейку: s_ρ', $s_\mu'' =$ П (вправо), Л (влево), Н (без сдвига). $\mathfrak{M}$, вообще говоря, недетерминированная машина, так как ее программа может содержать две команды с одинаковой левой частью. При различном применении этих команд получается различная переработка входного слова. Во время любой переработки входного слова входная головка не выходит за его пределы, $\mathfrak{M}$ допускает входное слово p, если существует

такая переработка p, при которой $\mathfrak{M}$ переходит в выделенное состояние. $\mathfrak{M}$ вычисляет предикат $\omega(x_1, \ldots, x_r)$ *, если $\mathfrak{M}$ допускает все такие слова $p = *x_1* \ldots *x_r*$, что $\omega(x_1, \ldots, x_r)$ — истинный, и только их.

Для входного слова p обозначим через $T_{\mathfrak{M}}(p)$ $(L_{\mathfrak{M}}(p))$ максимальное число шагов (обозреваемых ячеек рабочей ленты) $\mathfrak{M}$ при любой переработке p **. Пусть $L_{\mathfrak{M}}(n) = \max\limits_{|p|=n} L_{\mathfrak{M}}(p)$ ***, $T_{\mathfrak{M}}(n) = \max\limits_{|p|=n} T_{\mathfrak{M}}(p)$.

Теорема 1. *Пусть существуют недетерминированная двуленточная машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ и целые числа $\alpha > 1$, $\beta > 1$, C такие, что предикат $\omega(x_1, \ldots, x_r)$ вычислим на машине $\mathfrak{M}$ с $T_{\mathfrak{M}}(n) \leqslant n^{\alpha}$, $L_{\mathfrak{M}}(n) \leqslant n^{1-1/\beta}$ (для всех $n \geqslant C$). Тогда $\omega(x_1, \ldots, x_r)$ — рудиментарный предикат.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Класс предикатов, вычислимых на недетерминированных двуленточных машинах Тьюринга $\mathfrak{M}$ с $L_{\mathfrak{M}}(n) \leqslant C \log_2 n$ (C — константа, зависящая от предиката), входит в класс* **R**.

3. Сравнение класса R с другими классами. Методом, предложенным Г. С. Цейтиным и в ([11]), доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть существуют недетерминированная двуленточная машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ и целое число $\alpha > 1$ такие, что предикат $\omega(x_1, \ldots, x_r)$ вычислим на машине $\mathfrak{M}$ с $T_{\mathfrak{M}}(n) \leqslant n^{2-1/\alpha}$ (начиная с некоторого n). Тогда существует недетерминированная двуленточная машина Тьюринга $\mathfrak{M}'$, вычисляющая предикат $\omega(x_1, \ldots, x_r)$ с $T_{\mathfrak{M}'}(n) \leqslant n^4$ и $L_{\mathfrak{M}'}(n) \leqslant n^{1-1/3\alpha}$ (начиная с некоторого n).*

Из теорем 1, 2 вытекают

Следствие 2 **** **Log** $\subset$ **R**.

Следствие 3. $T \subset$ **R**.

Из теорем 1, 2 (([7]), § 19, ([13])) вытекают

Следствие 4. **M** $\subseteq$ **R**.

Следствие 5. $\mathbf{L}_{\kappa c} \subset$ **R** *****.

Замечание. Вместо следствия 2 из тех же посылок получается следующий, более сильный факт: класс предикатов, вычислимых на детерминированных одноленточных машинах Тьюринга $\mathfrak{M}$ с $T_{\mathfrak{M}}(n) \leqslant Cn^{2-1/\alpha}$ (α — целое число > 1, C — константа, α и C зависят от предиката), строго входит в **R**. Аналогично для следствия 3.

4. Ограниченно-арифметические предикаты. **Ар** — это наименьший класс предикатов, содержащих $x = y$ и замкнутый относительно: 1) операций алгебры логики; 2) навешивания ограниченных кванторов; 3) подстановки вместо переменных многочленов с натуральными коэффициентами ([1]). Определение **K** получается из определения **R** ([6]), если вместо предиката $C(x, y, z)$ взять предикаты $x + y = z$ и $x \cdot y = z$. Из следствия 1 вытекает, что $x + y = z$ и $x \cdot y = z$ принадлежат **R**. Отсюда и из теоремы 6 гл. IV ([2]) имеем

Следствие 6 (Беннетт) **K** = **R**.

Под навешиванием кванторов, ограниченных многочленом $\pi(\bar{y})$ на предикат $\Omega(\bar{x}, \bar{y}, z)$ ($\bar{x} = x_1, \ldots, x_m$; $\bar{y} = y_1, \ldots, y_n$), мы понимаем такие операции $(\exists z)\ (z \leqslant \pi(\bar{y})\ \&\ \Omega(\bar{x}, \bar{y}, z))$, $(\forall z)(z \leqslant \pi(\bar{y}) \rightarrow \Omega(\bar{x}, \bar{y}, z))$. Из определения **Ар** легко получается следующая

Лемма. **Ар** *есть наименьший класс, содержащий предикаты $x + y = z$ и $xy = z$ и замкнутый относительно:* 1) *операций алгебры логики;* 2) *явных преобразований* ******; 3) *навешивания кванторов, ограниченных многочленами.*

* Мы не различаем числовые и словарные (в алфавите {1, 2}) предикаты, имея в виду известное взаимно-однозначное соответствие между словами и числами (см., например, ([6])).

** $\mathfrak{M}$ должна останавливаться при любой переработке p.

*** $|p|$ означает длину слова p.

**** Определения $\mathbf{R}_*$, **R**, **Log**, **M** см. ([6]), T см. ([5]).

***** $\mathbf{L}_{\kappa c}$ — класс контекстно-свободных языков в алфавите {1, 2}. Определение см. ([7]).

****** Определение см ([6]).

С помощью этой леммы и теоремы 1 устанавливается

Теорема 3. *Классы рудиментарных и ограниченно-арифметических предикатов совпадают.*

Замечание. Таким образом, класс **R** замкнут относительно столь мощных операций, как навешивание кванторов, ограниченных многочленами.

5. s-Рудиментарные предикаты. Обозначим через $s(x)$ следующий предикат: «существует такое $n = 1, 2, \ldots$, что $x = \underbrace{1 \ldots 1}_{n} \underbrace{2 \ldots 2}_{n}$ *».

Теорема 4. *$s(x)$ не принадлежит классу s-рудиментарных предикатов.*

Отсюда вытекают

Следствие 7. $\mathbf{Log} \cap \mathbf{M} \cap T \cap \mathbf{L}_{nc}$ *не входит в класс* $\mathbf{R}_s$.

Следствие 8. *Предикаты $x + 1 = y$ и $x \leqslant y$ не принадлежат классу* $\mathbf{R}_s$.

Замечание. Поскольку предикат $x \leqslant y$ принадлежит классу **R** ([7]), из следствия 8 вытекает результат Беннетта (анонсированный в ([2])) о том, что $\mathbf{R}_s$ строго входит в **R**.

Примечание при корректуре. После получения настоящих результатов мы узнали, что следствие 5 также имеется в ([14]).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
19 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Кузнецов, К теореме о канонической форме для ординально-рекурсивных функций, Приложение к кн. Р. Л. Гудстейн. Математическая логика, М., 1961, стр. 149. [2] R. M. Smullyan, Theory of Formal Systems, Princeton, 1963. [3] Б. А. Трахтенброт, Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением, Алгебра и логика, Семинар III, 4, 1964, стр. 33. [4] D. L. Kreider, R. W. Ritchie, Zs. math. logic u. Grundl. d. math., 12, № 3, 243 (1966). [5] В. А. Непомнящий, О некоторых автоматах, способных вычислять базис для рекурсивно-перечислимых множеств, Алгебра и логика, Семинар V, 5, 1966, стр. 69. [6] В. А. Непомнящий, ДАН, 170, № 6, 1262 (1966). [7] А. В. Гладкий, Лекции по математической лингвистике для студентов НГУ, Новосибирск, 1966. [8] R. W. Ritchie, Trans. Am. Math. Soc., 106, № 1, 139 (1963). [9] A. Grzegorczyk, Some Classes of Recursive Functions, Rozprawy matematyczne, 4, 1953. [10] J. Hartmanis, P. M. Lewis II, R. E. Stearns, Proc. IFIP Congress 65, 1, 31 (1965). [11] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, J. Assoc. Comp. Math., 15, № 3, 414 (1968). [12] Р. Фрейвалд, Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга с входом, Алгебра и логика, Семинар IV, 1, 1965, стр. 47. [13] В. А. Непомнящий, Вычисления на машинах Тьюринга с метками, Резюме научных сообщений IX Всесоюзного алгебраического коллоквиума, Гомель, 1968, стр. 145. [14] N. D. Jones, Math. Syst. Theory, 3, № 2, 102 (1969).

* $l^n = l \ldots l$, $|l^n| = n$ $(l = 1, 2)$.