Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 2

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. И. ПОНОМАРЕВ

О МОЩНОСТИ БИКОМПАКТОВ С ПЕРВОЙ АКСИОМОЙ СЧЕТНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 VI 1970)

А. В. Архангельский ([1]) решил известную проблему П. С. Александрова, доказав, что бикомпакт с 1-й аксиомой счетности имеет мощность не более континуума. В этой заметке мы даем другое, как нам кажется, более простое доказательство указанной выше теоремы Архангельского. Наше доказательство основано на стандартной технике, восходящей еще к П. С. Урысону и А. Н. Тихонову, и на простой идее, содержащейся в нашей заметке ([2]).

Через $\chi(x, X)$ обозначается характер точки x в пространстве X, $s(X)$ — плотность пространства X, т. е. минимальная мощность плотного в X множества, $|A|$ — мощность множества A, $w(X)$ — вес пространства X. Пространство X называется секвенциальным, если множество $F \subseteq X$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда оно содержит предел любой сходящейся последовательности своих элементов. Очевидно, всякое пространство, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности, секвенциально.

Лемма 1 (см. ([1])). *Пусть X — хаусдорфово секвенциальное пространство (в частности, пространство с 1-й аксиомой счетности). Если $A \subseteq X$ и $|A| \leqslant 2^\tau$, $\tau \geqslant \aleph_0$, то $|[A]| \leqslant 2^\tau$. Если $A \subseteq X$ и $x_0 \in [A]$, то существует такое $A' \subseteq A$, что $|A'| \leqslant \aleph_0$ и $x_0 \in [A']$.*

Лемма 2. *Пусть X — хаусдорфово секвенциальное пространство, в котором для каждого трансфинитного числа $\lambda < \omega_1$ определено некоторое замкнутое множество F_λ таким образом, что $F_{\lambda'} \subseteq F_\lambda$, если $\lambda' < \lambda$. Тогда множество $\Phi = \bigcup F_\lambda$ также замкнуто в X.*

Лемма 3. *Если f: $X \to Y$ — совершенное отображение, то существует такое замкнутое множество $F \subseteq X$, что $fF = Y$ и f: $F \to Y$ неприводимо (и, конечно, совершенно).*

Лемма 4. (см. ([3])). *Если f: $X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение, то $s(X) = s(Y) \leqslant w(Y)$.*

Напомним теперь классическую конструкцию Урысона — Тихонова так, как она была изложена в ([3]).

Пусть для каждого $\alpha \in A$ задано непрерывное отображение f_α пространства X в пространства Y_α. Тогда определяется так называемое диагональное отображение f в тихоновское произведение $\prod Y_\alpha$ пространств Y_α, $\alpha \in A$, правилом: $fx = \{f_\alpha x\colon \alpha \in A\} \in \prod\limits_{\in A} Y_\alpha$. Диагональное отображение непрерывно, если непрерывны отображения f_α, и является гомеоморфизмом, если система отображений f_α: $X \to Y_\alpha$ является расчленяющей системой. Именно эту конструкцию мы и называем конструкцией Урысона — Тихонова.

Пользуясь этой конструкцией, легко доказать следующие два предложения (их, например, можно найти в ([3])).

Лемма 5. *Пусть вполне регулярное пространство X допускает совершенное отображение f на некоторое пространство Y веса $\leqslant \tau$. Тогда для каждого открытого множества $U \subseteq X$, для которого $X \setminus U$ — нуль-множество, существует пространство Y_U веса $\leqslant \tau$ и совершенное отображение f_U: $X \to Y_U$, при котором множество U отмечено, т. е. $f_U U$ открыто в Y_U и $f_U^{-1} f_U U = U$.*

Для доказательства этой леммы достаточно взять пространство Y веса $\leqslant \tau$ и совершенное отображение f на него, затем определить непрерывную функцию g так, чтобы множество $X \setminus U$ было нуль-множеством для g, а затем рассмотреть диагональное отображение f_U для f и g. Отображение f_U — искомое (оно совершенно, а $w(f_U X) \leqslant \tau$).

Лемма 6. *Пусть σ — семейство мощности $\leqslant \tau$ открытых множеств вполне регулярного пространства X, дополнения к которым — нуль-множества. Пусть X допускает совершенное отображение на пространство веса $\leqslant \tau$. Тогда существует пространство Y_σ веса $\leqslant \tau$ и совершенное отображение f_σ: $X \to Y_\sigma$, при котором каждое $U \in \sigma$ отмечено. При этом если семейство σ образует внешнюю базу* множества $\mathscr{M}$ в X, то отображение f_σ, рассматриваемое только на $\mathscr{M}$, является гомеоморфизмом и $f_\sigma^{-1} f_\sigma \mathscr{M} = \mathscr{M}$ (в частности, $f_\sigma^{-1} f_\sigma x = x$ для каждой точки $x \in \mathscr{M}$ при отображении f_σ: $X \to Y_\sigma$).*

Для доказательства этого предложения надо для каждого $U \in \sigma$ рассмотреть пространство Y_U веса $\leqslant \tau$ и совершенное отображение f_U: $X \to Y_U$ (по предыдущей лемме). Затем взять диагональное отображение f_σ: $X \to Y_\sigma$, $Y_\sigma \subseteq \prod_{U \in \sigma} Y_U$ для семейства отображений f_U: $X \to Y_U$. Пространство Y_σ — образ X при f_σ и стображение f_σ: $X \to Y_\sigma$ искомые.

Основная теорема. *Пусть вполне регулярное пространство X удовлетворяет следующим условиям:* а) *X допускает совершенное отображение на пространство веса $\leqslant c$,* б) *X секвенциально,* в) *$\chi(x, X) \leqslant c$ для каждой точки $x \in X$. Тогда $|X| \leqslant c$.*

Доказательство основной теоремы. Для доказательства теоремы мы для каждого трансфинитного числа $\lambda < \omega_1$ построим пространство Y_λ веса $\leqslant c$, совершенное отображение f_λ: $X \to Y_\lambda$ и замкнутое в X множество F_λ мощности $|F_\lambda| \leqslant c$ таким образом, чтобы

1°. $f_\lambda > f_{\lambda'}$ при $\lambda' > \lambda$, т. е. $f_{\lambda'}^{-1} f_{\lambda'} x \subseteq f_\lambda^{-1} f_\lambda x$ для каждой точки $x \in X$;

2°. $f_\lambda F_\lambda = Y_\lambda$ и f_λ: $F_\lambda \to Y_\lambda$ неприводимо;

3°. $F_\lambda \subset F_{\lambda'}$ при $\lambda' > \lambda$ и кроме того $f_{\lambda'}^{-1} f_{\lambda'} F_\lambda = F_\lambda$ и $f_{\lambda'}$: $X \to Y_{\lambda'}$, рассматриваемое только на F_λ,— гомеоморфизм, если $\lambda' > \lambda$.

Предположим, что такое построение мы уже произвели. Выведем отсюда заключение нашей теоремы. По лемме 2 множество $\Phi = \bigcup_{\lambda < \omega_1} F_\lambda$ замкнуто в X. Кроме того $|\Phi| \leqslant c$, ибо $|F_\lambda| \leqslant c$ и $\lambda < \omega_1$. Докажем теперь равенство

$$\Phi = X.$$

Пусть $x_0 \in X$ произвольно. Пользуясь 2°, заключаем, что $f_\lambda^{-1} f_\lambda x_0 \cap F_\lambda \neq \Lambda$ для любого λ. Тем более $f_\lambda^{-1} f_\lambda x_0 \cap \Phi \neq \Lambda$ для любого λ. Вследствие этого и того, что $f_\lambda^{-1} f_\lambda x_0$ — бикомпакты и $f_\lambda^{-1} f_\lambda x_0 \supseteq f_{\lambda'}^{-1} f_{\lambda'} x_0$, если $\lambda' > \lambda$ (см. 1°), получаем

$$\bigcap_{\lambda < \omega_1} f_\lambda^{-1} f_\lambda x_0 \cap \Phi \neq \Lambda.$$

Возьмем точку $x_1 \in \bigcap_{\lambda < \omega_1} f_\lambda^{-1} f_\lambda x_0 \cap \Phi$. Имеем $f_\lambda x_1 = f_\lambda x_0$ для любого λ. Возьмем такое λ, чтобы $x_1 \in F_\lambda$. Тогда, пользуясь 3°, заключаем, что $f_{\lambda+1}^{-1} f_{\lambda+1} x_1 = x_1$, откуда $f_{\lambda+1}^{-1} f_{\lambda+1} x_1 = f_{\lambda+1}^{-1} f_{\lambda+1} x_0$, а, следовательно, $x_1 = x_0$ и $x_0 \in F_\lambda \subset \Phi$. Итак, всякая точка $x_0 \in X$ принадлежит Φ, т. е. $X = \Phi$. Поэтому $|X| = |\Phi| \leqslant c$, и теорема доказана.

Приведем теперь построение.

Прежде всего пользуясь условием в) теоремы, а также полной регулярностью пространства X, поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ систему $\theta(x)$ окрестностей этой точки, образующую базу в ней и имеющую мощность $|\theta(x)| \leqslant c$ (дополнения к ним — нуль-множества).

* Система σ открытых в пространстве X множеств образует внешнюю базу множества $\mathscr{M} \subseteq X$, если для каждой точки $x \in \mathscr{M}$ и всякой ее окрестности Ox в X найдется такое $U \in \sigma$, что $x \in U \subseteq Ox$.

Шаг 1. Рассмотрим пространство Y_1 веса $wY_1 \leqslant c$ и совершенное отображение f_1: $X \to Y_1$. По лемме 3 рассмотрим замкнутое множество $F_1 \subseteq \subseteq X$, для которого $f_1F_1 = Y_1$ и f_1: $F_1 \to Y_1$ неприводимо. Тогда $s(F_1) = = s(Y_1) \leqslant c$ (лемма 4), следовательно, $|F_1| \leqslant c$ (лемма 1).

Шаг 2. Рассмотрим систему $\theta(F_1) = \bigcup_{x \in F_1} \theta(x)$. Очевидно, $\theta(F_1)$ образует внешнюю базу множества F_1 и $|\theta(F_1)| \leqslant c$. Теперь пользуясь леммой 6 построим пространство Y_2 веса $\leqslant c$ и совершенное отображение f_2: $X \to Y_2$, при котором каждое $U \in \theta(F_1)$ отмечено. Можно, очевидно, предположить, что $f_2 < f_1$, т. е. $f_2^{-1}f_2x \subseteq f_1^{-1}f_1x$ для любой точки $x \in X$. Пользуясь тем, что $\theta(F_1)$ — внешняя база множества $F_1 \subseteq X$, а все $U \in \theta(F_1)$ отмечены при f_2: $X \to Y_2$, можно заключить, что $f_2^{-1}f_2F_1 = F_1$ и f_2: $X \to Y_2$, рассматриваемое только на F_1,— гомеоморфизм, т. е. $f_2^{-1}f_2x = x$, если $x \in F_1$. По лемме 3 рассмотрим замкнутое в X множество F_2, для которого $f_2F_2 = Y_2$ и f_2: $F_2 \to Y_2$ неприводимо. Очевидно, $F_1 \subset F_2$, а по лемме 4 получаем, что $s(F_2) \leqslant c$, а, следовательно, $|F_2| \leqslant c$ (лемма 1).

Предположим, что для всех $\lambda < \lambda^*$ мы построили пространство Y_λ, $wY_\lambda \leqslant c$, совершенное отображение f_λ: $X \to Y_\lambda$ и замкнутое в X множество F_λ таким образом, что выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0.

Шаг λ^*. Рассмотрим множество $\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda$ и систему $\theta(\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda) = = \bigcup \{\theta(x) : x \in \bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda\}$. Так как $|F_\lambda| \leqslant c$ и $\lambda < \lambda^* < \omega_1$, то $|\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda| \leqslant c$, а, следовательно, $|\theta(\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda)| \leqslant c$. Кроме того, очевидно, $\theta(\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda)$ — внешняя база множества $\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda$ в X. По лемме 6 построим пространство Y_{λ^*}, $(Y_{\lambda^*}) \leqslant c$ и совершенное отображение f_{λ^*}: $X \to Y_{\lambda^*}$ таким образом, чтобы каждое $U \in \theta(\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda)$ было отмеченным, а $f_{\lambda^*} < f_\lambda$ для любого $\lambda < < \lambda^*$. Так как $\theta(\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda)$ — внешняя база множества $\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda$ в X, а все ее элементы отмечены при отображении f_{λ^*}: $X \to Y_{\lambda^*}$, то $f_{\lambda^*}^{-1}f_{\lambda^*}x = x$ для любой точки $x \in \bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda$. По лемме 3 рассмотрим такое замкнутое в X множество F_{λ^*}, чтобы $f_{\lambda^*}F_{\lambda^*} = Y_{\lambda^*}$ и f_{λ^*}: $F_{\lambda^*} \to Y_{\lambda^*}$ неприводимо. Очевидно, $\bigcup_{\lambda<\lambda^*} F_\lambda \subset F_{\lambda^*}$. Далее $s(F_{\lambda^*}) \leqslant c$ (лемма 4), $|F_{\lambda^*}| \leqslant c$ (лемма 1). Построение закончено. Тем самым полностью доказана основная теорема.

Следствие 1. *Всякий бикомпакт с 1-й аксиомой счетности имеет мощность не более континуума.*

Следствие 2. *Секвенциальный бикомпакт X, для которого $\chi(x, X) \leqslant \leqslant c$ для каждой точки $x \in X$, также имеет мощность не более континуума.*

Оказывается, только что доказанная теорема позволяет дать довольно простое доказательство известной теоремы Есенина-Вольпина.

Теорема (Есенина-Вольпина). *Диадический бикомпакт X с 1-й аксиомой счетности имеет счетную базу.*

Доказательство. Из доказанной выше теоремы Архангельского следует, что $w(X) \leqslant c$. Тогда X есть непрерывный образ D^c (Шанин). Далее $s(D^c) \leqslant \aleph_0$ (Марчевский — Хьюит — Пондишери), следовательно, $s(X) \leqslant \aleph_0$. Так как X с 1-й аксиомой счетности и $s(X) \leqslant \aleph_0$, то $\pi(X) \leqslant \leqslant \aleph_0$*. Но тогда $\pi(X) = w(X) \leqslant \aleph_0$ (см. ([2])). Теорема доказана.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, ДАН, 187, № 5, 967 (1969). [2] В. И. Пономарев, ДАН, 174, № 6, 1274 (1967). [3] В. И. Пономарев, УМН, 21, в. 4 (130), 101 (1966).

* $\pi(X)$ — π-вес пространства X ([3]).