Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (114), 2019

*УДК 519.172.5:519.175.1*

# К вопросу распознавания изоморфизма двудольных графов

Л.Н. Марченко, В.В. Подгорная

Работа посвящена новым инвариантам простых изоморфных графов. Приводится инвариант графа, основанный на преобразовании его матрицы смежности к «блочно-нулевому» виду. Предложен метод распознавания и установления изоморфизма двудольных графов. Данный метод включает в себя нахождение неплотности двудольных графов с помощью булевых функций методом Магу, преобразование матриц смежности графов к «блочно-нулевому» виду с учетом неплотности и выделенных долей графа, применение «оптимальной сортировки» ненулевых блоков матриц. Такая процедура позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множествами вершин изоморфных двудольных графов, сохраняющее соответствующую смежность. Демонстрируется работа алгоритма на примере.
**Ключевые слова:** двудольный граф, изоморфизм графов, матрица смежности, булевы методы в теории графов.

The paper is devoted to new invariants of simple isomorphic graphs. An invariant of the graph is given, based on the transformation of its adjacency matrix to a «block-null» form. The method of recognition and establishment of isomorphism of bipartite graphs is proposed. This method involves finding openings in bipartite graphs via Boolean functions by the Maghout method, the transformation matrices adjacency graph to «block-null» form taking into account the density and allocated graph parts, applying the «optimal» sorting the nonzero blocks of the matrices. This procedure allows us to establish a one-to-one correspondence between sets of vertices of isomorphic bipartite graphs preserving the corresponding adjacency. The work of the algorithm is demonstrated by an example.
**Keywords:** bipartite graph, graph isomorphism, adjacency matrix, Boolean methods in graph theory.

**Введение.** Графы используются в представлении и передаче различных видов информации, при разработке методов параллельного программирования, исследовании топологии сетей ЭВМ и многопроцессорных систем, а также в других областях программирования и множестве других областей знаний. Распознавание изоморфизма является основной составляющей прикладной теории графов. В настоящее время предложено несколько десятков инвариантов изоморфных графов, равенства которых являются только необходимыми условиями изоморфизма. Проблема формулировки достаточного условия изоморфизма графов является актуальной.

Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности на множестве всех графов одинакового порядка. Следовательно, он разбивает класс всех графов на непустые и попарно непересекающиеся подклассы, называемые *классами изоморфных графов*. Два произвольных графа принадлежат одному и тому же классу изоморфизма тогда и только тогда, когда они изоморфны друг другу. Изоморфные графы принято отождествлять, то есть считать совпадающими. В этом случае говорят об *абстрактных графах*.

Вопрос распознавания изоморфизма графов до сих пор остается неразрешенным окончательно. В настоящее время известны методы выявления изоморфизма для определенных видов графов [1]–[8]: деревьев, регулярных графов, сильно связных орграфов и некоторых других, для которых удалось либо построить полиномиальный алгоритм, либо доказать принадлежность проблемы классу NP-полных задач [8]. Инварианты графов являются одним из инструментов, позволяющих распознать изоморфные графы [2].

Для изоморфных графов характеристики и свойства совпадают. Инвариантом называется такая характеристика, которая принимает одинаковые значения на изоморфных графах. Инвариант называют полным, если его совпадение для графов обеспечивает существование изоморфного отображения между множествами их вершин, сохраняющее соответствующую смежность [2].

Число вершин и ребер графа, вектор локальных степеней вершин, число компонент связности являются одними из легко вычисляемых инвариантов графа. Имеется также ряд работ, в которых в качестве инварианта рассматривается спектр граф [4]. Рядом авторов особое внимание уделялось более сложным инвариантам, например, числу вершин наибольшего полного подграфа (плотность) и наибольшему числу попарно несмежных вершин графа (неплотность) [2], числу Хадвигера и другим. Равенство перечисленных характеристик для двух графов является необходимым условием их изоморфизма. Для построенных инвариантов существуют примеры неизоморфных графов с одинаковыми значениями указанных инвариантов [2].

Известно, что «условно» полным инвариантом является матрицы смежности графа [2]. В зависимости от нумерации вершин графа матрица смежности изменяется, при этом любая функция, не меняющаяся при перестановке ее строк и столбцов, является инвариантом в указанном выше смысле. При этом, матрица смежности позволяет однозначно восстановить граф в отличие от других инвариантов.

Широко известен следующий признак изоморфных графов.

**Теорема 1.** *Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности перестановочно подобны, то есть их можно получить одну из другой перестановками строк и соответствующих столбцов.*

Установление изоморфизма подразумевает решение двух задач: распознавание изоморфизма двух графов и построение биекции между множествами вершин графов, сохраняющей их смежность, с учетом возникающих автоморфизмов самого графа.

Признанным способом установления изоморфизма является применение теоремы 1, которое предполагает в общем случае сложность преобразований порядка $n!$.

Статья посвящена поиску новых необходимых условий изоморфизма графов и изучению особенностей их применения для двудольных графов.

**Основная часть.** Приведем необходимые определения и свойства.

Будем рассматривать абстрактный граф (граф) $G = (V, E)$ с совокупностью множества вершин $V = \{ v \}$ и множества ребер $E = \{ e = (u, v) \mid u, v \in V \}$ *порядка* $n$, где $|V| = n$, $|E| = m$. Все рассматриваемые графы полагаются без кратных ребер и петель, то есть простыми.

**Определение.** Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными* если существует взаимно-однозначное соответствие $h : V_1 \to V_2$, сохраняющее смежность соответствующих вершин: $e_1 = (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2$. Изоморфные графы обозначают $G_1 \cong G_2$. Изоморфное отображение графа на себя называется автоморфизмом.

*Матрицей смежности* графа $G$ называется матрица $A(G) = [a_{ij}]$, $i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, с элементами $a_{ij} = 1$, если $i$-я и $j$-я вершины смежны, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Граф называется *двудольным,* если существует такое разбиение множества его вершин на два класса, при котором концы каждого ребра лежат в разных классах. Если в двудольном графе любые две вершины из разных классов смежные, то такой граф называется *полным двудольным графом.*

Известен следующий признак двудольности графа.

**Теорема 2. (Кенига)** *Простой граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины* [9].

Граф называется *k-дольным графом,* если существует такое разбиение множества его вершин на $k$ классов, при котором всякое ребро графа соединяет две вершины из разных классов.

В случае $k$-дольного графа матрица смежности может быть приведена к блочному виду, в котором по главной диагонали идут только «нулевые» блоки:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21}^T & 0 & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1k}^T & A_{2k}^T & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

где $A_{ij}$ – некоторые подматрицы из 0 и 1.

Подмножество $V_1 \subseteq V$ графа $G = (V, E)$ называется *множеством внутренней устойчивости,* если никакие две вершины множества $V_1$ не являются смежными. *Неплотность* $\alpha_0(G)$

графа – это число, равное наибольшей из мощностей множеств внутренней устойчивости, то есть мощность максимального подмножества попарно несмежных вершин графа.

Существуют несколько методов нахождения построения множеств внутренней устойчивости графа $G$. В работе будем использовать метод Магу [2], [9], [10] отыскания семейства максимальных внутренне устойчивых подмножеств с использованием булевых функций. Здесь по единицам строк матрицы смежности $A(G)$ составляются парные дизъюнкты из вершин, и формируется конъюнктивная нормальная форма (КНФ). Затем КНФ преобразовывается в минимальную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Для каждой элементарной конъюнкции вершин выписываются недостающие вершины, которые и образуют множества внутренней устойчивости. Среди всех множеств внутренней устойчивости следует отобрать те, пересечение которых есть пустое множество, а объединение даст все вершины графа. Указанные множества и образуют доли $k$-дольного графа.

В соответствии с выделенными долями перегруппируем строки (и соответственно столбцы) матрицы смежности так, чтобы образовались соответствующие блоки из нулей на главной диагонали. Тем самым получаем возможность преобразовать матрицу смежности к специальному «блочно-нулевому» виду, исключая простой перебор вариантов перестановок строк и столбцов. Предложенный новый способ приведения матрицы смежности произвольного графа к указанному блочному виду требует менее чем $n!$ шагов. Очевидно, что следующая теорема является необходимым условием изоморфизма графов.

**Теорема 3.** *У изоморфных графов матрицы смежности с помощью перестановки строк и соответствующих столбцов могут быть приведены к блочному виду, состоящему из одного и того же количества нулевых блоков одинаковы размерностей, расположенных на главной диагонали.*

Заметим, что совпадение количества и размерностей нулевых блоков для преобразованных матриц смежности изоморфных графов не позволят установить искомое биективное отображение между множествами вершин графов, так как требуется еще рассмотреть строки и столбцы внутри ненулевых блоков. Только полное совпадение соответствующих преобразованных матриц смежности графов позволяет утверждать изоморфизм графов.

Поэтому будет верным следующий признак изоморфизма графов.

**Теорема 4.** *Два графа изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности с помощью перестановок строк и соответствующих столбцов могут быть приведены к одинаковому «блочно-нулевому» виду*.

Рассмотрим далее простые двудольные графы, не являющиеся деревьями. По теореме 2 (Кенига), чтобы убедиться в двудольности графа, следует установить, что все циклы графа имеют четную длину. Одним из методов обнаружения циклов четной длины графа является построение векторного пространства всех его циклов и вычисление их длин за $2^n - 1$ шагов [10]. Далее у двудольного графа следует выделить сами доли, то есть два класса таких вершин графа, что концы каждого ребра лежат в разных классах. Согласно методу Магу, используем матрицу смежности графа. В силу симметричности матрицы смежности относительно главной диагонали, будем рассматривать только элементы, расположенные выше диагонали. По ненулевым элементам «1» строк, расположенным выше главной диагонали, составляем парные дизъюнкты, одним из логических слагаемых которых является вершина соответствующей строки, в вторым – конъюнкция вершин соответствующих столбцов. Далее из полученных дизъюнктов формируем конъюнктивную нормальную форму (КНФ) и преобразовываем, используя законы алгебры логики, в минимальную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Из полученных элементарных конъюнкций выбираем две с взаимоисключающими вершинами, которые и определяют две доли графа.

Матрица смежности двудольного графа, приведенная к блочному виду, когда по главной диагонали идут только «нулевые» блоки, может быть записана следующим образом:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K^T & 0 \end{bmatrix},$$

где $K$ – подматрица из 0 и 1.

У изоморфных двудольных графов размерности двух нулевых блоков будут совпадать полностью, причем размерность одного из них $\alpha_0 \times \alpha_0$, второго − $(n - \alpha_0) \times (n - \alpha_0)$.

Для определенности будем полагать $\alpha_0 \geq (n - \alpha_0)$ и размерность ненулевого блока $K$ равной $\alpha_0 \times (n - \alpha_0)$. Весом $w$ строки (столбца) блока $K$ назовем количество ненулевых элементов «1» в строке (столбце).

Теорема 4 может использоваться для установления изоморфизма двудольных графов. В «блочно-нулевой» матрице смежности двудольного графа с одинаковыми по размерностям и расположению нулевыми блоками будем рассматривать только ненулевой блок $K$. Для подтверждения изоморфизма и установления биекции между множествами вершин графов требуется преобразовать ненулевые блоки двух графов к одинаковому виду. Для этого предлагается применить «оптимальный» способ сортировки строк и столбцов, состоящий из следующих шагов.

1. Упорядочим столбцы ненулевого блока $K$ по убыванию весов, то есть по количеству «1» в столбце.

2. Сортируем строки, то есть перемещаем вверх те строки, у которых на первой позиции стоит «1», ниже записываем строки с «0» на первой позиции. Получаем два подмножества строк. Упорядочиваем столбцы по убыванию весов в подмножестве с «1» и «0» соответственно.

3. В рамках первого подмножества строк (с «1» на первой позиции) перемещаем вверх те строки, у которых «1» расположена на второй позиции, вниз – строки с «0». Тем самым разбиваем данное подмножество еще на два подмножества: строки, у которых по два элемента «1» на первых позициях, и строки, у которых «10» расположены сначала. Продолжаем процесс до тех пор, пока в каждом подмножестве будет по одной строке. Аналогично группируем строки и во втором подмножестве с «0» на первой позиции.

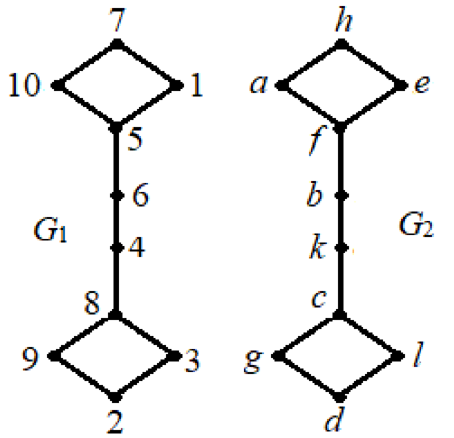


Рисунок 1 – Изоморфные графы $G_1$ и $G_2$

В результате такой сортировки столбцов и строк получим упорядоченные специальным образом ненулевые блоки $K$. В случае изоморфных двудольных графов преобразованные указанным способом ненулевые блоки матриц смежности полностью совпадут, что позволит установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) между множествами вершин графов, сохраняющую смежность.

Рассмотрим работу предложенного алгоритма на примере. Пусть известно, что графы $G_1$ и $G_2$ (рисунок 1) двудольные. Определим, какие вершины входят в доли графов, распознаем изоморфизм и установим требуемую биекцию вершин.

Матрицы смежности графов $G_1$ и $G_2$ имеют вид

$$A(G_1) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A(G_2) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ k \\ l \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Обозначения вершин расположены слева от строк и над столбцами соответственно.

Применим алгоритм Магу [9] к матрице $A(G_1)$ для нахождения неплотности $\alpha_0(G_1)$ графа $G_1$ и соответственно формирования долей графа. Составим парные дизъюнкты по «1», расположенным выше главной диагонали и запишем КНФ, а затем преобразуем к минимальной ДНФ как указано выше:

$$(1 \vee 57)(2 \vee 39)(3 \vee 8)(4 \vee 68)(5 \vee 6\,10)\,(7 \vee 10)\,(8 \vee 9)=$$
$$= (1 \vee 57)(2 \vee 39)(8 \vee 39)(4 \vee 68)(57 \vee 5\,10 \vee 67\,10 \vee 6\,10)=$$
$$= (1 \vee 57)(28 \vee 39)(4 \vee 68)(57 \vee 5\,10 \vee 6\,10) =$$
$$= (248 \vee 349 \vee 3689 \vee 268)(57 \vee 15\,10 \vee 16\,10) =$$
$$= 34579 \vee 356789 \vee 24578 \vee 25678 \vee 13459\,10 \vee 1358910 \vee 124589 \vee 125689 \vee$$
$$\vee\, 13469\,10 \vee 13689 \vee 12468\,10 \vee 1268\,10.$$

Здесь дизъюнкцию обозначает символ «$\vee$», а конъюнкцию – умножение.

Взаимоисключающими множествами вершин, входящих в элементарные конъюнкции, являются { 1, 2, 6, 8, 10 } и { 3, 4, 5, 7, 9 }, которые и образуют доли графа, при этом неплотность графа равна $\alpha_0(G_1) = 5$.

Упорядочим строки (соответственно и столбцы) матрицы смежности $A(G_1)$ графа $G_1$ по выделенным долям. В результате получим матрицу $A_1(G_1)$ вида

$$A_1(G_1) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\6\\8\\10\\3\\4\\5\\7\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 6 & 8 & 10 & 3 & 4 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матрицы $A_1(G_1)$ и $A(G_2)$ имеют по два нулевых блока размерности $5 \times 5$, соответствующие неплотности графов. Необходимое условие изоморфизма графов (теорема 3) выполняется. Теперь рассмотрим только ненулевые блоки преобразованных матриц:

$$K(G_1) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\6\\8\\10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ и } K(G_2) = \begin{array}{c} \\ a\\b\\c\\d\\e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f & g & h & k & l \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

По ненулевым блокам $K(G_1)$ и $K(G_2)$ нельзя сразу сделать вывод об изоморфизме графов $G_1$ и $G_2$. Применим предложенный интеллектуальный алгоритм для упорядочения элементов этих блоков. Для блока $K(G_1)$ имеем

$$K(G_1) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\6\\8\\10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow (1) \rightarrow \begin{array}{c} \\ 1\\2\\6\\8\\10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1\\ 1&0&0&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow (2) \rightarrow \begin{array}{c} \\ 1\\6\\10\\2\\8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c|cccc} 5 & 3 & 4 & 7 & 9 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cccc} 1&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ \hline 0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&1 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow$$

$$
(3)\to\begin{array}{c}\\1\\6\\10\\2\\8\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}5&7&4&9&3\end{array}\\\left(\begin{array}{c|cccc}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\\hline0&0&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{array}\right)\end{array}\to(4),(5)\to\begin{array}{c}\\1\\10\\6\\8\\2\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}5&7&4&9&3\end{array}\\\left(\begin{array}{c|c|c|cc}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\\hline0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\end{array}.
$$

Здесь:

(1) – ставим 5-й столбец на первую позицию, так как вес 5-го столбца равен 3, а остальных столбцов – 2;

(2) – опускаем 2-ю стоку ниже 10-й, получаем набор из трех «1» на первой позиции (в столбце с номером 5 три «1» и два «0»);

(3) – упорядочиваем столбцы по убыванию весов со второй позиции;

(4) – меняем 6-ю и 10-ю строки в первой подгруппе, получаем набор из двух «1» на второй позиции (в столбце с номером 7 две «1» и один «0»);

(5) – меняем 8-ю и 2-ю строки во втором подмножестве и получаем только одну «1» на второй позиции (в столбце с номером 7 две «1» и один «0»).

Аналогично рассуждая, преобразуем и блок $K(G_2)$:

$$
K(G_2)=\begin{array}{c}\\a\\e\\b\\c\\d\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}f&h&k&g&l\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}.
$$

Ненулевые блоки $K(G_1)$ и $K(G_2)$ матриц $A_1(G_1)$ и $A(G_2)$ соответственно преобразованы к одинаковому виду за оптимальное количество шагов. Максимальное число шагов равно неплотности $\alpha_0(G_1)$. На основании теоремы 4 заключаем, что двудольные графы $G_1$ и $G_2$ изоморфны. С учетом степеней вершин графов по расположению вершин в матрицах $A_1(G_1)$ и $A(G_2)$ устанавливаем соответствие между множествами вершин графов $G_1$ и $G_2$, сохраняющее соответствую смежность:

$$1\leftrightarrow a,\ 2\leftrightarrow d,\ 3\leftrightarrow l,\ 4\leftrightarrow k,\ 5\leftrightarrow f,\ 6\leftrightarrow b,\ 7\leftrightarrow h,\ 8\leftrightarrow c,\ 9\leftrightarrow g,\ 10\leftrightarrow e.$$

Таким образом, можно сформулировать предложенный алгоритм определения изоморфизма и построения изоморфного отображения для двудольных графов.

Отметим, что наличие одинаковых строк или столбцов в преобразованном виде ненулевого блока указывает на существование автоморфизма для соответствующих вершин, принадлежащих одной доли графа. При этом существующий автоморфизм вершин из разных долей остаётся необнаруженным.

**Заключение.** В статье описаны следующие новые результаты.

1. Предложен новый инвариант обнаружения изоморфизма графов в виде числа и размерности нулевых блоков преобразованных матриц смежности к «блочно-нулевому».

2. Описан «оптимальный» алгоритм преобразования ненулевых блоков преобразованных матриц смежности, позволяющий установить изоморфизм двудольных графов и биекцию между множествами вершин, сохраняющую соответствующую смежность.

## Литература

1. Батенков, К.А. Числовые характеристики структур сетей связи / К.А. Батенков // Труды СПИИРАН. – 2017. – Вып. 53. – С. 5–28.

2. Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.

3. Карелин, В.П. Задача распознавания изоморфизма графов. Прикладное значение и подходы к решению / В.П. Карелин // Вестник Таганрогского института управления и экономики. – 2015. – № 1. – С. 102–106.

4. Нечепуренко, М.И. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / М.И. Нечепуренко. – Новосибирск : Наука, 1990. – 520 с.

5. Пинчук, В.П. Табличные инварианты на графах и их применение / В.П. Пинчук // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 4. – С. 33–44.

6. Погребной, А.В. Метод дифференциации вершин графа и решение проблемы изоморфизма / А.В. Погребной, В.К. Погребной // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2015. – Т. 326, № 6. – С. 34–45.

7. Пономаренко, И.Н. Проблема изоморфизма графов: Алгоритмические аспекты (записки к лекциям) / И.Н. Пономаренко. – Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова, 2010. – 57 с.

8. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. – М. : Наука., 1975. – 480 с.

9. Maghout, K. Applications de l'Algebre de Boole a la Theorie des Graphes / K. Maghout. – Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche OpGrationnelle Bruxelles. – 1963. – V. 5, № 1–2. – 21 p.

10. Marchenko, L. Some ideas about connected graphs isomorphism / L. Marchenko, V. Podgornaya // Advances in Computer Science Research. – 2018. – Vol. 14. – P. 105–125.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 30.04.2019