Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 539.374+517.93

*ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Б. Е. ПОБЕДРЯ

# О СХОДИМОСТИ МЕТОДА «УПРУГИХ» РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ

*(Представлено академиком Л. И. Седовым 29 V 1970)*

1. Рассмотрим главную квазилинейную вязко-упругую несжимаемую среду, в которой связь между девиаторами напряжений $s_{ij}$ и деформаций $e_{ij}$ имеет вид [1]

$$s_{ij}=\int_0^t \Gamma(t-\tau)\,e_{ij}(\tau)\,d\tau-\int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau)\,\varphi(e)\,e_{ij}(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где $e\equiv e_{ij}(\tau)e_{ij}(\tau)=e_u^2(\tau)$.

Линейное ядро релаксации $\Gamma(t)$ и нелинейное $\Gamma_\varphi(t)$ разбиваются на сингулярную и регулярную составляющие

$$\Gamma(t)=\mathring{\Gamma}\delta(t)+\tilde{\Gamma}(t),\quad \Gamma_\varphi(t)=\mathring{\Gamma}_\varphi\delta(t)+\tilde{\Gamma}_\varphi(t).$$

Если $\mathring{\Gamma}_\varphi=0$, то соответствующая теория называется главной квазилинейной с мгновенной линейной упругостью [1]. Запишем сокращенно соотношения (1) в виде

$$s_{ij}=\check{\Gamma}e_{ij}-\check{\Gamma}_\varphi\varphi(e)\,e_{ij}. \tag{2}$$

Будем считать деформации малыми

$$e_{ij}={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i}),\ e_{ii}=0. \tag{3}$$

Подставляя соотношения (3) в (2), имеем

$$s_{ij}(\mathbf{u})\equiv s^0_{ij}(\mathbf{u})+s^1_{ij}(\mathbf{u}),\quad s^0_{ij}(\mathbf{u})=\check{\Gamma}e_{ij}(\mathbf{u})\equiv{}^1/_2\,\check{\Gamma}(u_{i,j}+u_{j,i}),$$

$$s^1_{ij}(\mathbf{u})=-\frac{1}{2}\check{\Gamma}_\varphi\varphi(e)\,(u_{i,j}+u_{j,i}),\qquad e=\frac{1}{2}(u_{i,j}u_{i,j}+u_{i,j}u_{j,i}).$$

Квазистатическая задача рассматриваемой теории вязко-упругости заключается в интегрировании трех уравнений равновесия

$$s_{ij,j}(\mathbf{u})+P_{,i}+\rho F_i=0$$

относительно вектора перемещения $\mathbf{u}$ при выполнении граничных условий

$$\mathbf{u}|_\Sigma=\mathbf{u}^0 \tag{4}$$

или

$$\sigma_{ij}l_j|_\Sigma=S_i^0. \tag{5}$$

Причем, если на границе $\Sigma$, ограничивающей рассматриваемый объем $V$, заданы условия (4), то говорят, что решается первая краевая задача, а при задании условий (5) — вторая краевая задача. Здесь $\sigma_{ij}=s_{ij}+P\delta_{ij}$, $P$ — функция, определяемая в результате решения задачи, $\rho F_i$ — массовые силы.

Заметим, что граничные условия (4) за счет изменения массовых сил $\rho\mathbf{F}$ могут быть сделаны однородными

$$\mathbf{u}|_\Sigma=0. \tag{6}$$

Поэтому под первой краевой задачей в дальнейшем будем понимать задачу с краевыми условиями (6).

Обозначим

$$P_{,i} + \rho F_i \equiv -f_i(x, t).$$

Следуя ([2]), назовем обобщенным решением первой и второй краевых задач соответственно вектор-функцию **u**, удовлетворяющую следующим интегральным тождествам для любой непрерывно-дифференцируемой вектор-функции **v** [7]

$$\int\limits_V [s_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) + f_i v_i] \, dV = 0,$$

$$\int\limits_V [s_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) + f_i v_i] \, dV + \int\limits_\Sigma S_i^0 v_i d\Sigma.$$

Введем скалярное произведение для некоторых дифференцируемых функций по формуле:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_V e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dV. \tag{7}$$

Решение поставленных задач определим в пространстве $H$, получающемся замыканием по норме (7) множества дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций, удовлетворяющих в случае первой краевой задачи условию (6). Как известно ([2], [3]), условие ограниченности в $H$ интегралов $\int\limits_V f_i v_i dV$ и $\int\limits_\Sigma S_i^0 v_i d\Sigma$ имеет место, когда

$$f_i \in L_p(V), \ p > {}^6/_5; \quad S_i^0 \in L_q(\Sigma), \ q > {}^4/_3.$$

Предположим теперь, что интегральное уравнение $x = \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) \times$ $\times\, y(\tau) d\tau$ однозначно разрешимо в виде $y = \int\limits_0^t K(t-\tau) x(\tau) d\tau$, так что ([1])

$$\int\limits_0^t K(t-\tau) \Gamma(\tau) \, d\tau = \delta(t). \tag{8}$$

Пусть далее функция $\varphi(e)$ такова, что для любого $t \geqslant 0$

$$0 \leqslant \varphi(e) \leqslant \varphi(e) + \frac{\varphi(e) - \varphi(e')}{e - e'} e' \leqslant \eta. \tag{9}$$

Кроме того ядро $\Gamma_\varphi(t)$ для любого $t \geqslant 0$

$$|\Gamma_\varphi(t)| \leqslant A\Gamma(t). \tag{10}$$

Метод «упругих» ([4]) решений заключается в последовательном решении задач линейной теории вязко-упругости

$$s_{ij,j}^0(\mathbf{u}_{(0)}) = f_i,$$

$$s_{ij,j}^0(\mathbf{u}_{(n)}) = -\, s_{ij,j}^1(\mathbf{u}_{(n-1)}), \quad n \geqslant 1,$$

при выполнении, например, условий (6). При этом неизвестная функция $P$ определяется из решения линейной задачи при определении нулевого приближения.

Теорема. *При выполнении условий* (8), (9), (10) *метод «упругих» решений сходится к единственному обобщенному решению*, если*

$$A\eta \equiv q < 1 \tag{11}$$

* Обобщенное решение будет классическим, если оно дважды непрерывно дифференцируемо по x.

*и начальное приближение $u_{(0)}$ таково, что*

$$\|\mathbf{u}_{(0)}\| = \left\{ \int\limits_V [e_{u\,(0)}]^2 dV \right\}^{1/2} \leqslant \frac{1-q}{q} r, \qquad (12)$$

*где $r$ — положительное число, для которого выполняется неравенство*

$$r \geqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{(0)}\|. \qquad (13)$$

Доказательство проведем для первой краевой задачи, так как доказательство для второй краевой задачи аналогично.

Рассмотрим тождество

$$\int\limits_V e_{ij}(\mathbf{u})\, e_{ij}(\mathbf{v})\, dV = \int\limits_V [\breve{K}\breve{\Gamma}_\varphi\, \varphi(e)\, e_{ij}(\mathbf{u})]\, e_{ij}(\mathbf{v}) dV - \int\limits_V [\breve{K} f_i]\, v_i dV. \qquad (14)$$

Слева в соотношении (14) стоит скалярное произведение в пространстве $H$: $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Правая часть (14) на основании (9) и (10) представляет собой линейный функционал относительно $\mathbf{v}$ в этом пространстве. По теореме Рисса этот функционал может быть представлен в виде скалярного произведения $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v})$, где $\mathbf{u}^* \in H$ [5]. Другими словами, в $H$ определен оператор $Q$, который каждой вектор-функции $\mathbf{u}$ ставит в соответствие вектор-функцию $\mathbf{u}^*$. Следовательно вопрос о нахождении обобщенного решения сводится к решению операторного уравнения

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{u}.$$

Докажем, что оператор $Q$ является оператором сжатия и тогда согласно принципу сжатых отображений отсюда будет следовать сходимость метода «упругих» решений и существование и единственность решения. (Если, конечно, задача линейной теории вязко-упругости имеет единственное решение [6].)

Из (9) и (10) следует, что для любых $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$

$$|(Q\mathbf{u}_1 - Q\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)| \leqslant q\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2,$$

откуда

$$\|Q\mathbf{u}_1 - Q\mathbf{u}_2\| \leqslant q\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|.$$

Далее из (12) и (13) имеем

$$\|Q\mathbf{u} - \mathbf{u}_{(0)}\| = \|Q\mathbf{u} - Q\,\mathbf{u}_{(0)}\| + \|Q\mathbf{u}_{(0)} - \mathbf{u}_{(0)}\| \leqslant rq + q\,\frac{1-q}{q}\, r = r.$$

Отсюда следует, что при $A\eta \equiv q < 1$ оператор $Q$ является оператором сжатия, и теорема доказана.

Заметим, что если функция $\varphi(e)$ такова, что $\varphi(e_{(0)}) = 0$ (т. е. существует некоторая малая «область линейности», в которой $\varphi(e) = 0$), то в этом случае $\eta = 0$ и рассмотренный метод, как следует из (12), сходится при любом нулевом приближении. В противном случае (когда «области линейности» не существует) и нам известно, что для решения $\mathbf{u}$: $e_u \leqslant M$, т. е. $\|\mathbf{u}\| \leqslant M\sqrt{V}$, то в (12) и (13) следует положить $r = A\eta M\sqrt{V}$ и тогда указанный итерационный процесс будет сходиться, если нулевое приближение $\mathbf{u}_{(0)}$ удовлетворяет условию

$$e_{u(0)} \leqslant (1 - A\eta) M.$$

2. Рассмотрим теперь некоторое обобщение метода «упругих» решений. Имеем тождество:

$$\int\limits_V e_{ij}(\mathbf{u})\, e_{ij}(\mathbf{v})\, dV = \int\limits_V e_{ij}(\mathbf{u})\, e_{ij}(\mathbf{v})\, dV - \beta \left\{ \int\limits_V e_{ij}(\mathbf{u})\, e_{ij}(\mathbf{v})\, dV - \right.$$

$$\left. - \int\limits_V [\breve{K}\breve{\Gamma}_\varphi \varphi(e)\, e(\mathbf{u})]\, e_{ij}(\mathbf{v})\, dV + \int\limits_V [\breve{K} f_i]\, v_i dV. \right. \qquad (15)$$

При $\beta = 1$ это тождество совпадает с (14). Повторяя все рассуждения п. 1, получим для (15)

$$\|Q\mathbf{u}_1 - Q\mathbf{u}_2\| \leqslant \psi(\beta)\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|; \quad \psi(\beta) \equiv 1 - \beta(1-q),$$

где $\beta$ изменяется в интервале $0 < \beta \leqslant 2/(2-q)$, при этом функция $\psi(\beta) < 1$ достигает своего наименьшего значения $\psi(\beta) = q/(2-q)$ при $\beta = 2/(2-q)$. Очевидно, на интервале $0 < q < 1$ справедливо неравенство

$$0 < q/(2-q) < q.$$

Поэтому итерационный процесс, построенный по схеме (15) при $\beta = 2/(2-q)$, сходится быстрее, чем в случае (14). Таким образом и здесь справедлива доказанная в п. 1 теорема, причем вместо неравенства (12) следует положить

$$\|\mathbf{u}_{(0)}\| \leqslant \frac{1-\psi(\beta)}{\psi(\beta)} r = \frac{\beta(1-q)}{1-\beta(1-q)} r. \tag{16}$$

При $\beta = 2/(2-q)$ из (16) имеем:

$$\|\mathbf{u}_{(0)}\| \leqslant 2r(1-q)/q,$$

т. е. область допустимых нулевых приближений увеличивается в 2 раза.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 28 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, Основы математической теории термовязко-упругости, «Наука», 1970. [2] И. И. Ворович, Ю. П. Красовский, ДАН, 126, № 4 (1959). [3] Д. Л. Быков, В. А. Шачнев, ПММ, **33**, № 2 (1969). [4] А. А. Ильюшин, Пластичность, 1948. [5] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», 1965. [6] Б. Е. Победря, ДАН, **190**, № 2 (1970).