**Доклады Академии наук СССР**
**1971. Том 196, № 2**

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

**П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ**

# О ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 16 VI 1970)*

В банаховом пространстве $E$ рассматривается уравнение

$$L_0 v(t) \equiv a(t)v'(t) + Av(t) = f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{1}$$

Здесь $a(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ скалярная функция, $a(0) = 0$ и $a(t) > 0$ при $t > 0$. Предполагается, что уравнение (1) сингулярно, т. е. что

$$\int_0^1 ds/a(s) = +\infty. \tag{2}$$

Оператор $A$ — это неограниченный линейный оператор, порождающий аналитическую полугруппу $\exp\{-tA\}$, норма которой удовлетворяет неравенству

$$\|\exp\{-tA\}\| \leqslant C \cdot \exp\{-\delta t\} \tag{3}$$

при некоторых положительных постоянных $C$ и $\delta$.

Уравнение (1) с ограниченным оператором $A$ исследовалось в работах ([1–5]). При этом использовалась примененная впервые в ([1]) следующая идея. Сингулярный оператор $a(t) \cdot d / dt$ не имеет в обычных пространствах функций, например в пространстве непрерывных функций, ограниченного обратного. В то же время полный сингулярный оператор $a(t) \cdot d / dt + A$ в силу оценки (3) может быть ограниченно обратим. Это позволяло оценить $v(t)$, а, следовательно, $Av(t)$ и $a(t)v'(t)$ через $f(t)$. Заметим, что в случае неограниченного оператора $A$ из оценки $v(t)$ не следует оценка $Av(t)$.

Для регулярного уравнения

$$Lv(t) \equiv v'(t) + Av(t) = f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{4}$$

в ([6–8]) изучена коэрцитивная разрешимость задачи Коши в пространствах $C_0^\alpha$ непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$\|\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)\| C \Delta t^\alpha t^{-\alpha} \qquad (0 < t \leqslant t + \Delta t \leqslant 1) \tag{5}$$

в пространствах Бохнера $B_p$ и Лоренца $\Lambda_p$. В первой части данной работы эти же факты устанавливаются для вырождающегося уравнения (1). Во второй ее части исследуются дробные степени вырождающегося оператора $L_0$ и порожденная им полугруппа. Отметим, что пространства, в которых рассматривается оператор $L_0$, не зависят от $a(t)$.

Если $\delta < 0$ в оценке (3) и $A$ не имеет точек спектра на мнимой оси, то к исследованию надо дополнительно привлечь результаты ([1–5]) по уравнениям с ограниченными операторами.

1. Под решением уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную при $t > 0$ функцию $v(t)$, удовлетворяющую почти при всех $t$ этому уравнению.

Теорема 1. *Пусть полугруппа* $\exp\{-tA\}$ *сильно непрерывна, функция* $f(t)$ *сильно измерима и*

$$\int_0^1 \exp\left\{-\delta \int_s^1 dz/a(z)\right\} \cdot \|f(s)\| ds/a(s) < \infty. \tag{6}$$

*Тогда решение* $v(t)$ *уравнения* (1) *имеет вид*

$$v(t) = w(t) + \int_0^t \exp\left\{-A \int_s^t dz/a(z)\right\} \cdot f(s)\, ds/a(s) \tag{7}$$

*где* $w(t)$ — *решение однородного уравнения* ($f(t) \equiv 0$). *Если* $v(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to +0} \exp\left\{\delta \int_t^1 dz/a(z)\right\} v(t) = 0, \tag{8}$$

*то* $w(t) \equiv 0$.

Таким образом, условие (8) выделяет класс единственности. Именно такие решения рассматриваются в дальнейшем.

2. **Рассмотрим уравнение** (1) в $C_0^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). Оно коэрцитивно разрешимо, если для любой функции $f(t) \in C_0^\alpha$ существует единственное решение $v(t)$ этого уравнения и справедливо неравенство

$$\|a(t)\, v'(t)\|_{C_0^\alpha} + \|Av(t)\|_{C_0^\alpha} \leqslant K_\alpha \|f\|_{C_0^\alpha} \tag{9}$$

с постоянной $K_\alpha$, не зависимой от $f$.

Теорема 2. *Пусть для любых* $0 < t \leqslant \tau \leqslant 1$ *и некоторых* $c > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $D > 0$ *справедливы неравенства*

$$a(t) \leqslant c \cdot a(\tau), \int_t^\tau dz/a(z) \geqslant \max\left\{\frac{1}{\delta_1} \ln \frac{\tau}{t}, \frac{1}{\delta_2} \ln \frac{a(\tau)}{a(t)}\right\} - D. \tag{10}$$

*Пусть* $0 < \alpha < \min\{1, \delta / \delta_1 + \delta_2\}$. *Тогда уравнение* (1) *коэрцитивно разрешимо в* $C_0^\alpha$.

Условиям (2) и (10) удовлетворяют, например, функции $t^\beta$ ($\beta \geqslant 1$), $\exp\{-ct^{-\beta}\}$ ($c > 0$, $\beta > 0$) и т. д.

В отличие от уравнений с ограниченным оператором, как и в случае регулярных параболических уравнений, коэрцитивная разрешимость здесь имеет место в пространствах Гёльдера с весом. Наконец, гладкость решений здесь установлена без ограничений на гладкость $a(t)$.

3. Изучим теперь коэрцитивную разрешимость в пространствах $B_p$ и $\Lambda_p$.

Теорема 3. *Пусть сингулярное уравнение* (1) *или задача Коши для регулярного уравнения* (4) *коэрцитивно разрешимы в пространстве* $B_{p_0}$ *или* $\Lambda_{p_0}$ *при некотором* $p_0 > 1$. *Пусть существует непрерывная на* $[0, 1]$ *функция* $\rho(t)$, *удовлетворяющая при некоторых* $c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$ *неравенствам*

$$c_1 a(t) \leqslant \rho(t) \leqslant c_2 a(t). \tag{11}$$

*Пусть при любых* $0 < t \leqslant \tau \leqslant 1$ *и некотором* $p > 1$ *справедливо неравенство*

$$|\rho^{1/p}(\tau)\, \rho^{-1/p}(t) - 1| \leqslant \omega_p\left(\int_t^\tau dz/a(z)\right), \tag{12}$$

*где* $\omega_p(s)$ — *определенная при всех* $s \geqslant 0$ *непрерывная неотрицательная функция и*

$$\int_0^\infty \exp\{-\delta_p s\}\, \omega_p(s)\, ds/s < \infty \tag{13}$$

*при некотором* $\delta_p < \delta$.

*Тогда уравнение* (1) *коэрцитивно разрешимо в* $B_p$.

*Пусть условия* (12) *и* (13) *выполнены при всех* $p \in (p_1, p_2)$.

*Тогда уравнение* (1) *коэрцитивно разрешимо в* $B_p$ *и* $\Lambda_p$ *для всех* $p \in \in (p_1, p_2)$.

4. Результаты предыдущих пунктов с помощью разложения единицы переносятся на уравнения с переменным оператором $A(t)$, имеющим постоянную область определения.

5. Ниже изучаются спектральные свойства вырожденного оператора $L_0$ в пространствах $C_0^\alpha$, $B_p$ и $\Lambda_p$. Предполагается, что полугруппа лишь сильно непрерывна, и оператор $L_0$ определяется как замыкание такого же оператора, естественным образом определенного на гладких функциях. Для определенности рассмотрим пространство $B_p(\Lambda_p)$.

Теорема 4. *Пусть при любых* $0 < t \leqslant \tau \leqslant 1$ *и некоторых* $c_1 > 0$ *и* $\delta_1 > 0$ *справедливо неравенство*

$$a(\tau)\,[a(t)]^{-1} \leqslant c_1 \exp\left\{\delta_1 \int_t^\tau dz/a(z)\right\}, \tag{14}$$

*Тогда при любом* $p \geqslant 1$ *и любом* $\lambda$ *с* $\operatorname{Re}\lambda > \delta_{1/p} - \delta$ *оператор* $L_0 + \lambda I$ *имеет в* $B_p(\Lambda_p)$ *ограниченный обратный, причем справедливо неравенство*

$$\|[L_0 + \lambda I]^{-n}\|_{B_p(\Lambda_p)} \leqslant cc_1\,[\operatorname{Re}\lambda + \delta - \delta_1/p]^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

*Здесь* $c$ *и* $\delta$ — *постоянные из неравенства* (3).

Это означает, что оператор $L_0$ является производящим оператором сильно непрерывной в $B_p(\Lambda_p)$ полугруппы $\exp\{-\tau L_0\}$, которая, как и в случае регулярного параболического оператора ([9]) не будет аналитической. Неравенство (15) обобщает известное неравенство Харди ([10]) для оператора усреднения.

6. Наконец, если $\delta > \delta_1/p$, то оператор $L_0$ позитивен и, следовательно, определены ([11]) его любые степени. Имеет место неравенство (ср. ([8]))

$$\|L_0^{-\alpha}\|_{B_p(\Lambda_p)} \leqslant cc_1\,[\Gamma(\alpha)]^{-1}(\delta - \delta_1/p)^{-\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{16}$$

обобщающее неравенство для операторов усреднения Гёльдера порядка $\alpha$ ([10]).

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
6 VI 1970

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Чечик, Тр. Московск. матем. общ., 8, 155 (1959). [2] Г. А. Бессмертных, Сборн. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Киев, 1964. [3] З. И. Гусейнов, А. И. Перов, Уч. зап. Азерб. Гос. унив., сер. физ.-матем., № 3, 4 (1964). [4] А. Ю. Левин, ДАН, 175, № 5 (1966). [5] В. П. Глушко, С. Г. Крейн, ДАН, 181, № 4 (1968). [6] П. Е. Соболевский, ДАН, 157, № 1 (1964). [7] П. Е. Соболевский, ДАН, 165, № 3 (1965). [8] П. Е. Соболевский, УМН, 21, в. 1 (127) (1966). [9] П. Е. Соболевский, Матер. VI физ.-матем. конфер. Дальнего Востока, 3, Хабаровск, 1967. [10] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, М., 1948. [11] М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, ДАН, 129, № 3 (1959).