Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 2

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

М. В. ФЕДОРЮК

ФОРМУЛЫ КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 VI 1970)

В настоящей работе с помощью метода стационарной фазы получены формулы композиции для псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), введенных Хёрмандером ([1]).

1. Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda)=\int f(x)\exp(i\lambda g(x))\,dx.$$

Здесь $f\in C_0^\infty(\Omega)$, $g\in C^\infty(\Omega)$ и g вещественнозначна, $\Omega\subset R^n$ — ограниченная область. Введем обозначения:

$$H_g(x^0)=(\partial_i\partial_j g(x^0)),\qquad \partial_j=\partial/\partial x_j,$$
$$\Delta_g(x^0)=\det H_g(x^0),\quad \sigma_g(x^0)=\operatorname{sgn} H_g(x^0)$$

($\operatorname{sgn} A$ — сигнатура квадратичной формы с матрицей A),

$$h(x,x^0)=g(x)-g(x^0)-{}^1/_2\langle H_g(x^0)(x-x^0),x-x^0\rangle.$$

Известно ([2]), что основной вклад в $I(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ вносят критические (или стационарные) точки функции g. Методами стационарной фазы обычно называют методы, позволяющие вычислять асимптотику $I(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$.

Теорема 1. *Пусть функция g в области Ω имеет единственную, и притом невырожденную, критическую точку x^0. Тогда при любом целом $k\geqslant 1$*

$$I(\lambda)=c_n^0\exp(i\lambda g(x^0))\lambda^{-n/2}\sum_{j=0}^{k-1}a_j(f,g;\lambda)\lambda^{-j}+\lambda^{-\alpha_k}R_k(\lambda). \tag{1}$$

Здесь

$$a_j=1/j!L^j(f(x)\exp(i\lambda h(x,x^0))|_{x=x^0},$$
$$L={}^1/_2 i\langle H_g^{-1}(x^0)\nabla_x,\nabla_x\rangle, \tag{2}$$
$$c_n^0=(2\pi)^{n/2}|\Delta_g(x^0)|^{-1/2}\exp(i\pi\delta_g(x^0)/4).$$

Для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_k(\lambda)|\leqslant c_k\|f\|_{C^{\beta}(\Omega)},\quad \lambda\geqslant 1 \tag{3}$$

для некоторого $\beta=\beta(k)<\infty$, $\alpha_k=n/2+k-[2k/3]$.

Функции a_j являются полиномами от λ степени $\leqslant[2j/3]$, так что формула (1) дает асимптотическое разложение $I(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ по степеням λ^{-1}. Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Теорема 1 обобщается на случай, когда f, g зависят от параметров: $f=f(x,\omega,\lambda)$, $g=g(x,\omega)$, где $\omega\in M^k$ — компактное ориентируемое C^∞-многообразие размерности $k<\infty$. Пусть f, g удовлетворяют условиям:

1) $f,g\in C^\infty(D)$, $D=\Omega\times M^k\times R_+$, где R_+ — полуось $\lambda\geqslant 1$, функция g вещественнозначна.

2) $f \equiv 0$ при $x \overline{\in} K$ при всех $(\omega, \lambda) \in M^k \times R_+$, где $K \subset \Omega$ — компакт, не зависящий от ω, λ.

3) Для любых мультииндексов α, β, γ

$$|D_x^\alpha D_\omega^\beta D_\lambda^\gamma f(x, \omega, \lambda)| \leqslant c_{\alpha\beta\gamma}(K')\lambda^{m-\gamma}$$

в $K' \times M^k \times R_+$, где K' — любой компакт, содержащийся в Ω, m — фиксированное число, D_ω^β — линейный дифференциальный оператор порядка $|\beta|$, заданный на M^k, с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

4) При $x \in \Omega$ и при каждом фиксированном $\omega \in M$ функция $g(x, \omega)$ имеет единственную критическую точку $x = \varphi(\omega) \in \Omega$.

5) $\inf\limits_{\omega \in M^k} |\mu_j(\omega)| > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$

где $\mu_j(\omega)$ — собственные значения матрицы $H_g(\varphi(\omega), \omega)$.

Теорема 2. *Если условия* 1) — 5) *выполнены, то формулы* (1), (2) *и оценка* (3) *остаются в силе, причем c_k не зависит от ω. Разложение* (1) *можно дифференцировать по λ, ω любое число раз.*

2. В ([1]) рассматриваются п.д.о. вида

$$(Pu)(x) = \iint \exp(i\varphi(x, y, \xi))\, p(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi, \quad x \in \Omega_1, \quad u \in C_0^\infty(\Omega_2). \quad (4)$$

Здесь $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$, $\xi \in R^N$, и Ω_j — ограниченные области в R^{n_j}. Функция $p \in S^m = S^m(\Omega_1 \times \Omega_2, R^N)$ и называется символом оператора P. Функция φ вещественнозначна, положительно однородна по ξ порядка 1 при $|\xi| \geqslant 1/2$ и

$$\nabla_{x,\xi}\varphi \neq 0, \qquad \nabla_{y,\xi}\varphi \neq 0$$

при $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $|\xi| = 1$. Функция φ называется фазовой функцией оператора P. Через $L^m(\varphi)$ обозначим класс всех линейных непрерывных операторов P: $C_0^\infty(\Omega_2) \to C^\infty(\Omega_1)$, которые можно представить в виде (4) с данной фазовой функцией φ и с некоторым символом $p \in S^m$, по модулю $T_{-\infty}$ (т. е. интегральных операторов с бесконечно дифференцируемым ядром).

Пусть P_j, $j = 1, 2$ — операторы вида (4) с символами $p_j \in S^{m_j}(\Omega_1^j \times \Omega_2^j, R^{N_j})$ и с фазовыми функциями φ_j. Если $n_2^2 = n_1^1$, $\Omega_2^2 \subset \Omega_1^1$, то определено произведение P_2hP_1, где $h \in C_0^\infty(\Omega_1^1)$. Получим формулу для этого произведения. Рассмотрим функцию

$$\psi_{21} = \varphi_2(x^2, y^2, \xi^2) + \varphi_1(y^2, y^1, \xi^1). \quad (5)$$

Обозначим через $Q_\alpha(x^2, y^1, \xi^1)$ критические точки ψ_{21} как функции от (y^2, ξ^2) (т. е. решения уравнения $\nabla_{y^2,\xi^2}\psi_{21} = 0$) и введем, как и в п. 1, обозначения $H_\psi(Q_\alpha)$, $\Delta_\psi(Q_\alpha)$, $\sigma_\psi(Q_\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть операторы $P_j \in L^{m_j}(\varphi_j)$, $j = 1, 2$, функция h удовлетворяют сформулированным выше условиям, и*

$$\nabla_{y^j}\varphi_j(x^j, y^j, \xi^j) \neq 0, \quad |\xi^j| = 1,$$
$$(x^j, y^j) \in \Omega_1^j \times \Omega_2^j \quad (j = 1, 2).$$

Пусть функция ψ_{21} имеет конечное число критических точек Q_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant l$, и все они невырождены, при $|\xi^1| \geqslant c > 0$ и при $(x^2, y^1) \in K \subset \Omega_1^2 \times \Omega_2^1$ для любого компакта K.

Тогда

$$(P_2hP_1u)(x) = \sum_{\alpha=1}^{l} (R_\alpha u)(x) + (T_{-\infty}u)(x), \quad (6)$$

$u \in C_0^\infty(\Omega_2^1)$. *Здесь R_α — операторы вида* (4) *с фазовыми функциями ψ_α и символами $q_\alpha \in S^m(\Omega_1^2 \times \Omega_1^2, R^{N_1})$, $m = m_1 + m_2 + 1/2(N_2 - n_1)$.*

Выпишем формулы для ψ_α и главных символов $q_\alpha{}^0$:

$$\psi_\alpha(x, y, \xi^1) = \varphi_1(x_\alpha^1(x, y, \xi^1), y, \xi^1) + \varphi_2(x, x_\alpha^1(x, y, \xi^1), \quad \xi_\alpha^2(x, y, \xi^1)),$$
$$q_\alpha^0 = (2\pi)^{1/2(N_2+n_1)} p_1(x_\alpha^1(x, y, \xi^1), y, \xi^1) p_2(x, Q_\alpha(x, y, \xi^1))(h \circ x_\alpha^1)(x, y, \xi^1). \quad (7)$$

Здесь
$$Q_\alpha(x, y, \xi^1) = (x_\alpha{}^1(x, y, \xi^1), \ \xi_\alpha{}^2(x, y, \xi^1)).$$

Эта теорема следует из теоремы 2. Используя (1), (2), можно получить разложения для символов q_α.

Частными случаями этой теоремы являются:

1) Формулы Кона — Ниренберга ([3]) и Хёрмандера ([4]) для произведения двух классических п.д.о.

2) Формула Ю. В. Егорова ([5]) для произведения P_2hP_1, где P_1 — классический п.д.о., а P_2 — оператор вида

$$(P_2u)(x) = (2\pi)^{-n}\int p(x, \xi) \exp(iS(x, \xi)) \tilde{u}(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Из теоремы 3 следует, что множество операторов $L(\varphi) = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} L^m(\varphi)$ ($n_1 = n_2$) с компактными по x, y символами, вообще говоря, не образует алгебры относительно естественной операции умножения.

Московский физико-технический институт

Поступило
5 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Сборн. пер. Математика, 13, 6 (1969). [2] М. В. Федорюк, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2, № 1 (1962). [3] Дж. Кон, Л. Ниренберг, Псевдодифференциальные операторы, Сборн. статей, М.— Л., 1967, стр. 9—62. [4] Л. Хёрмандер, Псевдодифференциальные операторы, 1967, стр. 63—87. [5] Ю. В. Егоров, УМН, 24, 5 (149) (1969).