Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 532.592 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, ВЫЗВАННЫХ ДАВЛЕНИЕМ, ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 21 IV 1970)

Дается точное решение рассматриваемой здесь задачи, задавая давление на поверхности некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Исследуется и особый случай, когда длина волны заданного давления совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока и постоянному давлению вдоль поверхности. Рассмотренные здесь волны перестают существовать при тождественном обращении в нуль периодической части распределенного по поверхности давления и течение переходит в равномерный поток. Такие волны названы вынужденными [1]. Здесь кратко излагаются полученные нами результаты. Аналогичная задача для гравитационных волн была рассмотрена нами ранее [2]. Установившиеся, но свободные капиллярно-гравитационные волны также были исследованы нами ранее [3, 4] методом Леви-Чивита, сводящим задачу к нелинейному дифференциальному уравнению. Здесь задача сводится к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения.

Рассмотрим плоско-параллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление $p = p_0' + p_0(x)$; здесь $p_0' = \text{const}$, а $p_0(x)$ является заданной периодической функцией от горизонтальной координаты x. Предположим, что поток движется слева направо с постоянной скоростью c на бесконечной глубине. Так как на поверхности давление является периодической функцией x, то поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$. Мы показываем, что вынужденные волны существуют при любых конечных значениях скорости c.

Пусть искомая волна и давление $p_0(x)$ обладают одинаковой симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось Oy с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси Oy со свободной поверхностью, а ось Ox направим вправо. Плоскость течения xOy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей; ψ — функция тока; $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей.

Для вывода из граничного условия основного уравнения задачи мы сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и являющуюся бесконечной вертикальной полуполосой, ограниченной сверху волнообразной кривой, на полуполосу $0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda$, $0 \leqslant \psi \leqslant \infty$ в плоскости w, а затем эту полуполосу на внутренность единичного круга с центром в нуле плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$. Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u, \tag{1}$$

причем профиль волны перейдет в окружность единичного круга с разрезом вдоль радиуса $\arg u = 0$.

Выражение z через u определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{f(u)}{u}, \quad f(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k. \tag{2}$$

Коэффициенты a_k вещественны, так как волна симметрична относительно оси Oy.

Как обычно, вводя функцию (1)

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i \ln f(u), \tag{3}$$

мы из (2) и (3) находим, при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса-вектора с осью u_1), дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos\Phi(\eta)\, d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi(\eta)\, d\eta. \tag{4}$$

Из формул (3), (2) и (1) следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу вектора скорости $\mathbf{q}$ с осью Ox и что

$$q = |\mathbf{q}| = c \exp(\tau). \tag{5}$$

Из интеграла Бернулли для поверхности, учтя по закону Лапласа силы поверхностного натяжения, после преобразований получим

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left[\delta e^{-\tau} - e^{\tau} - \frac{2\pi}{\lambda}\varkappa y e^{-\tau} - p_0^*(x)\, e^{-\tau}\right], \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} \nu = \lambda c^2 \rho / 4\pi\mu, \quad \delta = 2(C\rho - p_0')/\rho c^2, \\ \varkappa = g\lambda/\pi c^2, \quad p_0^*(x) = 2p_0(x)/\rho c^2; \end{gathered} \tag{7}$$

C — константа в интеграле Бернулли, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, μ — капиллярная постоянная. В (6) y определяется второй формулой (4). Выделив в правой части (6) слагаемые линейные относительно Φ и τ, получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left\{\delta - 1 + (\delta+1)\tau + \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta)(1-\tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta]\right\}, \tag{8}$$

где $F[\tau, \Phi, S, \delta] = \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^{\tau} - 1 - \tau) + \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta [e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi -$

$$-\Phi(\eta)]\, d\eta - \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta + \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta)(e^{-\tau} - 1 + \tau).$$

Здесь предполагается, что, с точностью до константы, включенной в p_0',

$$p_0^*(x) = S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \cos n\theta, \tag{9}$$

где ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n$ сходится в круге $\varepsilon_0 > 0$. Заметим, что в исходной задаче $p_0^*(x)$ — заданная периодическая функция от x. Можно, однако, показать, что решение изучаемой задачи при условии (9) соответствует заданию ряда

$$p_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n c_n' \cos\frac{2\pi n}{\lambda} x, \quad c_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m c_{mn}'.$$

При этом либо коэффициенты c_{0n}' можно считать заданными и по ним определить d_n, либо наоборот; коэффициенты c_{mn}' ($m = 1, 2, \ldots$) определяются через d_n.

Равенство (8) дает связь между функциями $\tau(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ на окружности $|u| = 1$. Для них справедливы известные соотношения Дини:

$$\begin{gathered}\Phi(\theta) = \int_0^{2\pi} K_0(\eta, \theta) \frac{d\tau}{d\eta} d\eta, \quad K_0(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\eta \sin n\theta}{n}, \\ \tau(\theta) = -\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \frac{d\Phi}{d\eta} d\eta, \quad K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n}.\end{gathered} \tag{10}$$

Линейные слагаемые в (8) преобразуем, применяя формулы (10) и интегрирование по частям. Затем объединяем слагаемые с разными ядрами $K(\eta, \theta)$ и $K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n^2}$ (первая итерация ядра $K(\eta, \theta)$) и одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi / d\eta$.

В уравнении (8) константы ν и $\varkappa$ считаются заданными, а δ определяется из условия периодичности: $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$. Так как $S(\theta)$ задается формулой (9), то решение уравнения (8) и, следовательно, δ будут зависеть от ε. Положив в (8)

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon), \tag{11}$$

найдем, что $\delta_0 = 1$ из условия периодичности при $\varepsilon \to 0$.

После всех преобразований и, учтя (11), уравнение (8) примет окончательный вид:

$$\begin{gathered}\zeta(\theta) = \nu \Big\{ \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta + \delta'(\varepsilon) + \delta'(\varepsilon) \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta + \\ + \varkappa \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta) d\eta - S(\theta) \Big[1 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta \Big] + \\ + F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)] \Big\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $d\Phi / d\theta = \zeta(\theta)$,

$$K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta) \varphi_n(\theta)}{\nu_n}, \quad \nu_n = \frac{n^2}{2n - \varkappa}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}; \tag{13}$$

ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$.

Если считать, что в выражении F функция $\tau(\theta)$ взята из (10) и $\Phi(\theta) = \int_0^{\theta} (d\Phi/d\eta) d\eta$, то (12) будет нелинейным интегральным уравнением для $\zeta(\theta) = d\Phi / d\theta$.

Условие периодичности функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\begin{gathered}\delta'(\varepsilon) = -\varkappa \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big\{ S(\theta) \Big[1 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta \Big] - \\ - F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)] \Big\} d\theta.\end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, задача свелась к определению функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и константы $\delta'(\varepsilon)$ из уравнений (12) и (14). При этом $\tau(\theta, \varepsilon)$ найдется из (10), а $\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_0^{\theta} \zeta(\eta, \varepsilon) d\eta$. При решении приходится рассматривать два случая: в первом случае $\nu \neq \nu_n$, во втором $\nu = \nu_n$.

В первом случае решение $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Во втором случае в качестве примера мы рассмотрели значение $\nu = \nu_1$. Здесь решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях, применяя методы Ляпунова — Шмидта с использованием (при $\nu = \nu_1$) диаграммы Ньютона ([5]), мы доказываем, что указанные ряды абсолютно и равномерно сходятся при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и малых значениях $|\varepsilon| < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ и дают единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение задачи.

Относительно случая $\nu = \nu_n$ отметим еще, что, в силу (13), ν_n зависит от параметра $\varkappa$ и, как можно показать, при некоторых $\varkappa$, называемых бифуркационными, собственное значение ν_n будет двукратным. Кроме того, оно может быть и отрицательным. Параметр $\nu > 0$ согласно (7). Здесь предполагается, что параметр $\varkappa$ выбран так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным.

Профиль волны в параметрической форме $x(\theta, \varepsilon)$ и $y(\theta, \varepsilon)$ определяется из соотношений (4). Исключая из параметрического уравнения θ, мы получаем уравнение профиля в форме $y = y(x, \varepsilon)$.

Приводим приближенные с точностью до членов третьего порядка уравнения профиля волны в обоих случаях, положив $k = 2\pi / \lambda$.

В случае $\nu \neq \nu_n$:

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k}\{\varepsilon C_{11}(\cos kx - 1) + {}^1/_4\,\varepsilon^2 (C_{11}^2 - C_{22})(1 - \cos 2kx) + {}+ {}^1/_6\,\varepsilon^3 [(6C_{13} + {}^9/_4\,C_{11}C_{22})(\cos kx - 1) + {}+ ({}^1/_3\,C_{11}^3 - {}^5/_4\,C_{11}C_{22} + {}^2/_3\,C_{33})(\cos 3kx - 1)]\}, \tag{15}$$

где $$C_{11} = \frac{\nu\nu_1 d_1}{\nu - \nu_1}, \quad C_{22} = (d_2 + {}^1/_2\,d_1 C_{11} + {}^3/_4\,\varkappa C_{11}^2)\,\nu\nu_2 / (\nu - \nu_2),$$

$$C_{13} = \frac{\nu\nu_1}{\nu_1 - \nu}\tilde{C}_{13}, \quad C_{33} = \frac{\nu\nu_3}{\nu_3 - \nu}\tilde{C}_{33}.$$

Здесь $\tilde{C}_{13}$ и $\tilde{C}_{33}$ — линейные функции от C_{11}^3, $C_{11}^2 d_1$, $C_{11} d_2$, $C_{11} C_{22}$, $C_{22} d_1$ и d_3.

В случае $\nu = \nu_1$ выражение для $y(x, \varepsilon)$ получится из (15), если в фигурной скобке добавить слагаемые

$$\varepsilon^2 C_{12}(\cos kx - 1), \quad {}^1/_2\,\varepsilon^3 (C_{11}C_{12} - {}^1/_2\,C_{23})(1 - \cos 2kx)$$

и всюду ε заменить на $\varepsilon^{1/3}$. Коэффициенты будут иметь значения:

$$C_{11} = d_1^{1/3}\alpha^{1/2}, \quad \alpha = \frac{32(\nu_2 - \nu_1)}{8(\nu_2 - \nu_1) + 9\varkappa^2\nu_1\nu_2},$$

$$C_{22} = {}^3/_4\,\varkappa C_{11}^2 \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}, \quad C_{12} = -\frac{\varkappa({}^1/_2\,C_{11}^2 + 5C_{22})}{9[1 + \varkappa(1 + 7\nu_1\nu_2\varkappa/8(\nu_2 - \nu_1)]},$$

$$C_{23} = \varkappa C_{11} C_{12} \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}, \quad C_{33} = \frac{\nu_1\nu_3}{\nu_3 - \nu_1}\tilde{C}_{33};$$

$\tilde{C}_{33}$ — линейная функция от C_{11}^3 и $C_{11}C_{22}$; C_{13} — аналогично C_{12}, но с другими коэффициентами.

По условию задачи начало координат помещено в гребне волны. Поэтому из анализа главных членов в формулах для $y(x, \varepsilon)$ и полагая $\nu_1 < \nu < \nu_2$, заключаем, что надо считать $d_1 > 0$.

Отметим, что $\nu = \nu_1$ является тем особым случаем, который отмечен в начале статьи. Действительно, при $\nu = \nu_1$ из (7) и (13) получается известная формула, связывающая c и λ в указанном особом случае.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. И. Секерж-Зенькович, Прикл. матем. и мех., 33, в. 4, 648 (1969). [2] Я. И. Секерж-Зенькович, ДАН, 180, № 2, 304 (1968). [3] Я. И. Секерж-Зенькович, ДАН, 109, № 5, 913 (1956). [4] Я. И. Секерж-Зенькович, Тр. Морск. гидрофиз. инст. АН УССР, № 27, 58 (1963). [5] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, УМН, 17, в. 2 (104), 13 (1962).