Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 539.374.1 *МЕХАНИКА*

С. З. БРУК

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 1 X 1970)

Рэлей [1] решал задачу о распространении экспоненциальной волны, гаснущей с глубиной и удовлетворяющей условию свободной поверхности (экспоненциальная волна Рэлея) для упругой среды. Для случая полуплоскости эта задача ставится так: найти в области $y > 0$ решение вида

$$u = \sum_{k=1}^{2} A_k e^{i\gamma(\alpha x + \beta_k y - t)}, \quad v = \sum_{k=1}^{2} B_k e^{i\gamma(\alpha x + \beta_k y - t)}$$

системы дифференциальных уравнений Коши

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = \rho\ddot{u}, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = \rho\ddot{v},$$

где

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

ограниченное при $y = 0$:

$$\operatorname{Re} i\gamma\alpha x \leqslant 0,$$

убывающее при $y \to +\infty$:

$$\operatorname{Re} i\gamma\beta_k < 0$$

и удовлетворяющее условию:

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0.$$

Формулы Рэлея в перемещениях пишутся так:

$$u = C\left[\alpha^2\beta_2 e^{i\gamma\beta_1 y} - \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}p_2^2\right)\beta_2 e^{i\gamma\beta_2 y}\right]e^{i\gamma(\alpha x - t)},$$
$$v = C\left[\beta_1\beta_2\alpha e^{i\gamma\beta_1 y} - \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}p_2^2\right)\alpha e^{i\gamma\beta_2 y}\right]e^{i\gamma(\alpha x - t)}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная;

$$\beta_k = \beta_k(\alpha) = \sqrt{-\alpha^2 + p_k^2}, \quad p_1^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}, \quad p_2^2 = \frac{\rho}{\mu}; \tag{2}$$

α — корень уравнения Рэлея:

$$\alpha^2\beta_1(\alpha)\beta_2(\alpha) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}p_2^2\right)^2 = 0, \tag{3}$$

при котором выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} i\gamma\alpha x \leqslant 0 \text{ и } \operatorname{Re} i\gamma\beta_k(\alpha) < 0. \tag{4}$$

Формула (1) дает экспоненциальную волну, соответствующую корню α.

Уравнение (3) исследовано в [2].

В. Г. Гоголадзе [3] решал задачу о прохождении экспоненциальной волны Рэлея для вязко-упругой полуплоскости при линейных больцмановских соотношениях напряжение — деформация:

$$\sigma_{xx} = P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2Q\,\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2Q\,\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_{xy} = Q\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

где P, Q — интегральные операторы,

$$P\zeta = \lambda\zeta - \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t-T)\,\zeta(T)\,dT, \quad Q\zeta = \mu\zeta - \int\limits_{-\infty}^{t} \psi(t-T)\,\zeta(T)\,dT,$$

а $\varphi(s)$, $\psi(s)$ — спектральные функции времен релаксации,

$$\varphi(s) = \int\limits_{0}^{+\infty} a(\tau)\,e^{-s/\tau}d\tau, \quad \psi(s) = \int\limits_{0}^{+\infty} b(\tau)\,e^{-s/\tau}d\tau; \tag{5}$$

$$a(\tau) > 0, \quad b(\tau) > 0. \tag{6}$$

Результат работы ([3]), записанный в перемещениях, может быть получен из формул Рэлея (1)—(4) подстановкой * вместо λ и μ функций $L = L(\gamma)$ и $M = M(\gamma)$:

$$L = \lambda - \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(s)\,e^{i\gamma s}ds, \quad M = \mu - \int\limits_{0}^{+\infty} \psi(s)\,e^{i\gamma s}ds. \tag{7}$$

Мы сохраним для указанных формул прежнюю нумерацию со звездой (1^*)—(4^*).

Уравнение

$$\alpha^2\beta_1(\alpha)\,\beta_2(\alpha) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}p_2^2\right)^2 = 0, \tag{3*}$$

$$\beta_k = \sqrt{-\alpha^2 + p_k^2}, \quad p_1^2 = \frac{\rho}{L+2M}, \quad p_2^2 = \frac{\rho}{M}, \tag{2*}$$

исследовано в ([3, 6, 7]) в частных предположениях относительно L и M. Мы ставим целью исследовать уравнение (3^*) общего вида. Оно приводится к виду

$$\sqrt{N_1\omega - 1}\,\sqrt{N_2\omega - 1} + ({}^1/_2\omega - 1)^2 = 0, \quad \omega = \frac{\rho}{M\alpha^2}, \tag{8}$$

$$N_1 = M/(L+2M), \qquad N_2 = 1.$$

Корни (8) удовлетворяют уравнению

$$\omega^3 - 8\omega^2 + 8(3 - 2N_1)\,\omega - 16(1 - N_1) = 0. \tag{9}$$

Обозначим через ω_1 корень (9) с наименьшей вещественной частью: $\operatorname{Re}\omega_1 < \operatorname{Re}\omega_k$ $(k = 2, 3)$.

Предложение I.

$${}^1/_2 < \operatorname{Re}\omega_1 < 1. \tag{10}$$

Предложение II.

$$\operatorname{Re}\omega_k > 2 \ (k = 2, 3). \tag{11}$$

Доказательство предложений I и II. Для изотропной среды, как известно,

$$\operatorname{Re}L > 0, \quad \operatorname{Re}M > 0.$$

Отсюда, в силу (5), (6) и (7),

$$\operatorname{Re}\frac{L}{M} > 0, \quad \operatorname{Re}\frac{1}{N_1} > 2. \tag{12}$$

С помощью (12) можно убедиться, что

$$\operatorname{Re}\omega_1 \neq {}^1/_2, \quad \operatorname{Re}\omega_1 \neq 1 \text{ и } \operatorname{Re}\omega_k \neq 2 \ (k = 2, 3). \tag{13}$$

---

* Такой способ решения задач для вязко-упругой среды в настоящее время широко используется (см. [4, 5]).

Кроме того, известны значения $N_1\left(\mathrm{Re}\frac{1}{N_1} > 2\right)$, например, $N_1 = 1/3$, для которых соотношения (10), (11) выполняются. Поэтому, в силу (13) и в силу непрерывности ω_e $(e = 1, 2, 3)$, следует справедливость (10), (11) при любом N_1, $\mathrm{Re}\frac{1}{N_1} > 2$.

Предложение III. *Если определить ветви радикалов* $\sqrt{N_k\omega - 1}$ *условием* *

$$\arg\sqrt{N_k\omega - 1} = {}^1/_2\arg(N_k\omega - 1) + n_k\pi, \quad n_1 = n_2 = 0 \text{ или } 1, \tag{14}$$

то только корень ω_1 *уравнения* (9) *будет удовлетворять уравнению* (8).

Соответственно, если определить ветви $\beta_k(\alpha)$ *условием*

$$\arg\beta_k(\alpha) = {}^1/_2\arg(-\alpha^2 + p_k^2) + n_k\pi, \quad n_1 = n_2 = 0 \text{ или } 1, \tag{14'}$$

то $\alpha_1^2 = \rho / (M\omega_1)$ *будет единственным решением уравнения* (3*).

Доказывается при помощи неравенства (10) и (11).

Обозначим через $A(\alpha)$ комплексную полуплоскость переменного α, удовлетворяющую неравенству

$$\mathrm{Re}\, i\gamma\alpha x \leqslant 0, \tag{15}$$

с разрезами вдоль линий

$$\mathrm{Re}\, i\gamma\beta_k(\alpha) = 0$$

и определим на ней ветви $\beta_k(\alpha)$ условием

$$\mathrm{Re}\, i\gamma\beta_k(\alpha) < 0. \tag{16}$$

Предложение IV. *Единственным корнем уравнения* (3*), *принадлежащим области* $A(\alpha)$, *является* $\alpha_1 = \sqrt{\rho / (M\omega_1)} \in A(\alpha)$.

Этому корню соответствует экспоненциальная волна Рэлея.

Доказательство. Условие (15), (16) равносильно условию

$$\arg\beta_k(\alpha) = {}^1/_2\arg(-\alpha^2 + p_k^2) + n\pi, \tag{14''}$$

где $n = 0$ или 1 в зависимости от знаков γ и x.

Следовательно, $\alpha_1 = \sqrt{\rho / (M\omega_1)}$ является единственным корнем уравнения (3*) (согласно предыдущему предложению). В силу (15) и (16) ему соответствует экспоненциальная волна Рэлея.

Примечание при корректуре. Автор пользуется случаем, чтобы уточнить формулировку предложения 1 ([8], стр. 539): к напечатанному «существует, притом единственное, решение (u, v) задачи (1)—(4) в классе обобщенных функций» следует добавить «, зависящих от параметра y, $y \geqslant 0$, принадлежащих пространству $S'(R^2_{t,x})$ вместе со своими производными по y до второго порядка».

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
8 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Rayleigh, Proc. Math. Soc. London, 17 (1897). [2] В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, Тр. Сейсм. инст., № 20 (1932). [3] В. Г. Гоголадзе, Тр. Сейсмич. инст. № 87 (1938). [4] Ю. Н. Работнов, ПММ, 12, в. 3 (1938). [5] Д. Бленд, Теория линейной вязко-упругости, М., 1965. [6] F. Pess, I. Hely, J. Appl. Phys., 28, № 11 (1957). [7] M. Newlands, J. Acous. Soc. Am., 26, № 3 (1954). [8] С. З. Брук, ДАН, 197, № 3 (1971).

* Здесь и далее $\arg z \in (0, 2\pi)$.