Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 517.522.3 *МАТЕМАТИКА*

Е. М. НИКИШИН

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ БАНАХА

(Представлено академиком П. С. Новиковым 26 VI 1970)

Хорошо известна теорема Римана: *если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

составленный из действительных чисел, сходится условно, но не абсолютно, то для любого числа A можно так переставить члены ряда (1), *что вновь полученный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} \tag{2}$$

сходится к числу A.

П. Леви [1] доказал теорему, аналогичную теореме Римана, для случая рядов в N-мерном пространстве. Некоторые ошибки в доказательстве П. Леви позднее были исправлены в работе Штейница [2].

Теорема Леви — Штейница. *Область сумм ряда векторов в N-мерном пространстве R_N*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{u}_k$$

при всевозможных перестановках членов ряда есть или пустое множество или k-мерная гиперплоскость, где $0 \leqslant k \leqslant N$. Для каждой k-мерной гиперплоскости можно построить ряд векторов, для которого эта гиперплоскость служит областью сумм.

Теорема Римана является, очевидно, частным случаем этой теоремы при $N = 1$.

Аналогичный вопрос возникает при рассмотрении функциональных рядов. В работе (см. [3] стр. 124) формулируется следующая задача, поставленная Банахом.

Пусть ряд из измеримых функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0, 1], \tag{3}$$

при одной перестановке сходится почти всюду на $[0, 1]$ к $F(x)$, а при другой — к $G(x)$. Спрашивается, можно ли для каждого действительного числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ переставить члены ряда (3) так, чтобы он стал сходиться почти всюду на $[0, 1]$ к функции $\lambda F(x) + (1-\lambda) G(x)$?.

В работе [4] нами было доказана

Теорема 1. *Пусть дан ряд* (3) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty \tag{4}$$

почти всюду на $[0, 1]$. *Тогда область сумм* Ω *ряда* (3) (*т. е. множество функций* $F(x)$, *к которым ряд* (3) *сходится почти всюду на* $[0, 1]$ *при всевозможных перестановках*) *есть гиперпространство, замкнутое по мере.*

Последнее означает, что если $F \in \Omega$ и $G \in \Omega$, то $\lambda F + (1-\lambda)G \in \Omega$ для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и из того, что $F_n \in \Omega$ и $F_n \to F_0$ по мере на $[0, 1]$ следует, что $F_0 \in \Omega$.

Таким образом при дополнительном условии (4) проблема Банаха имеет положительное решение.

Сформулируем теорему, из которой вытекает отрицательное решение проблемы Банаха в общем случае.

Теорема 2. *Существует ряд измеримых ограниченных функций*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{5}$$

удовлетворяющий условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^{2+\varepsilon} < C_\varepsilon$$

при всех $\varepsilon > 0$ *и* $x \in [-1, 1]$, *который при одной перестановке членов ряда равномерно сходится к* 0, *а при другой перестановке — к функции*

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0]; \\ 1, & x \in (0, 1]; \end{cases}$$

и ни при какой перестановке членов ни одна подпоследовательность частных сумм ряда (5) *не может сходиться к функции*

$$\chi_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0]; \\ \lambda, & x \in (0, 1]; \end{cases}$$

(λ — *любое нецелое*) *на множестве* E *с* $mE > 1$.

Таким образом, теорема 1 неусиляема.

Теорема 3. *Существует ряд измеримых функций*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

который при одной перестановке членов ряда сходится почти всюду на $[0, 1]$ *к функции* $F(x)$, *при другой перестановке — к* $G(x)$, *и ни при одной перестановке он не является сходящимся почти всюду на* $[0, 1]$ *к* $\frac{1}{2}[F(x) + G(x)]$.

Следствие 1. *При любом* $p \geq 1$ *в пространстве* $L_p[-1, 1]$ *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n,$$

который при одной перестановке членов ряда сходится в L_p *к* 0, *при другой — к* $g \in L_p$, *и ни при какой перестановке членов ряда ни одна подпоследовательность частных сумм не сходится в* L_p *к* $\frac{1}{2}g$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Levy, Nouv. ann. Math. (4), 5, 506 (1905). [2] E. Steinitz, J. reine u. angew. Math., 143, 128 (1913); 144, 1 (1913). [3] W. Orlitz, Bull. Acad. Polonaise, 1927, 117. [4] Е. М. Никишин, Матем. заметки, 7, в. 4, 403 (1970).