Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 517.543

МАТЕМАТИКА

В. В. САВИН

О МОДУЛЯХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 IX 1970)

В этой заметке изучаются свойства множества модулей римановых поверхностей $S' = f(S)$, получаемых при всевозможных гомеоморфизмах f фиксированной поверхности S, квазиконформных (с ограниченной характеристикой) на заданном множестве $D \subset S$. Обозначим это множество модулей через $T(D)$. Подобного рода множества рассматривались в работах [8, 9]. П. П. Белинским была поставлена задача выяснить топологическую структуру множества D, для которого $T(D)$ есть все пространство модулей, т. е. совпадает с пространством Тейхмюллера. Ниже дается решение этой задачи для случая, когда D — область.

1. Сначала приведем некоторые определения. Поверхность типа (g, n, m) называется поверхностью S, конформно эквивалентной $\hat{S} \setminus \{p_1 \ldots p_m \cup d_1 \ldots d_n\}$, где $\hat{S}$ — замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $g \geqslant 1$, p_i — точки, d_i — замкнутые круги, $p_i \neq p_j$, $i \neq j$, $d_i \cap d_j = \phi$, $i \neq j$, $p_i \notin d_j$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Ниже всюду предполагается, что $g + n + m < \infty$.

Поверхность S будем называть отмеченной, если соответствующая замкнутая поверхность $\hat{S}$ является отмеченной (см. [3]). Совокупность классов конформно эквивалентных отмеченных поверхностей типа (g, n, m) образует пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_{g,n,m}$. В $\mathbf{T}_{g,n,m}$ можно ввести глобальные действительные аналитические координаты — модули, изменяющиеся в ограниченной области эвклидова пространства $\mathbf{R}^{6g-6+2n+2m}$ [6].

Известно [7], что любые отмеченные поверхности типа (g, n, m) квазиконформно эквивалентны, т. е. $T(D) = \mathbf{T}_{g,n,m}$ при $D = \phi$. В случае $\bar{D} = \hat{S}$ множество $T(D)$ является окрестностью точки, представляющей S в $\mathbf{T}_{g,n,m}$ (см. [9]). Таким образом, $T(D)$ — некоторая окрестность множества $T_0(D) \subset \mathbf{T}_{g,n,m}$ модулей поверхностей S', получаемых квазиконформными гомеоморфизмами, конформных на множестве $D \subset S$. С. Л. Крушкаль [8] показал, что если D — конечно-связная область, то $T_0(D)$ содержит некоторую окрестность точки, представляющей S в $\mathbf{T}_{g,n,m}$.

Обозначим через Σ^0 специальный набор путей на поверхности S типа (g, n, m), состоящий из объединения канонического рассечения Σ и канонической гомологической базы Σ' поверхности S (см [10]). Σ^0 разделяет поверхность S типа (g, n, m) на n односвязных областей и состоит из $2g + n - 1$ замкнутых жордановых дуг с единственной общей точкой p_0, образующих каноническую гомологическую базу S и $n + m$ непересекающихся жордановых дуг, проведенных от точки p_0 к каждой граничной компоненте S.

2. Сформулируем наши результаты.

Теорема 1. *Пусть S — поверхность типа (g, n, m), $D \subset S$ — область такая, что существует специальный набор Σ^0 путей на S, содержащийся в D вместе с некоторой своей окрестностью, за исключением конечного числа точек. Тогда $T_0(S \setminus D) = \mathbf{T}_{g,n,m}$ и, следовательно, $T(S \setminus D) = \mathbf{T}_{g,n,m}$.*

Теорема 2. *Пусть S — поверхность типа (g, n, m), $D \subset S$ — область такая, что для любого специального набора Σ^0 на S множество $\Sigma^0 \setminus D \cap \Sigma^0$ содержит дугу длины >0. Тогда $T_0(S \setminus D) \neq \mathbf{T}_{g,n,m}$ и $T(S \setminus D) \neq \mathbf{T}_{g,n,m}$.*

Доказательство теоремы 1. Поверхность S представляется в виде U/Γ, где U — круг $|z|<1$, а Γ — соответствующая S фуксова группа с фундаментальным многоугольником Фрике $\mathbf{P}_s$ [5]. Граница $\mathbf{P}_s$ состоит из $4g+2m+3n$ дуг окружностей $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1', \alpha_2, \ldots, \beta_g', \gamma_1, \gamma_1', \ldots, \gamma_m', \delta_1, \varepsilon_1, \delta_1^1, \ldots, \delta_n'$ таких, что существуют гиперболические элементы A_i, B_i, G_j и эллиптические элементы D_k, $i=1, \ldots, g$, $j=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, m$, $A_i, B_i, G_j, D_k \in \Gamma$, $A_i(\alpha_i)=-\alpha_i'$, $B_i(\beta_i')=-\beta_i$, $G_j(\delta_j)=-\delta_j'$, $D_k(\gamma_k)=-\gamma_k'$, удовлетворяющие соотношению $G_n \ldots G_1 D_m \ldots D_1 B_g^{-1} \times A_g^{-1} B_g A_g \ldots A_1 = 1$; ε_j — дуги окружности $|z|=1$, образы граничных континуумов, $\partial\mathbf{P}_s \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \varepsilon_j$ — образ Σ. В дальнейшем образы Σ^0 и Σ в $\mathbf{P}_s$ будем снова обозначать теми же символами Σ^0 и Σ. Множество $\mathbf{P}_s \setminus \Sigma^0$ состоит из n односвязных областей: $\mathbf{P}_{1s}, \mathbf{P}_{2s}, \ldots, \mathbf{P}_{ns}$. Граница $\mathbf{P}_{1s}$ содержит дуги $\alpha_1\beta_1, \alpha_1', \beta_1', \ldots, \beta_g', \gamma_1, \gamma_1', \ldots, \gamma_m', \delta_1, \varepsilon_1, \delta_1'$, граница $\mathbf{P}_{is}$, $i=2, \ldots, n$, содержит дуги $\delta_i, \varepsilon_i, \delta_i'$; остальные части границ $\mathbf{P}_{is}$, $i=1, \ldots, n$,— образы $\Sigma^0 \setminus \Sigma$. При $n=0$ множество $\mathbf{P}_s \setminus \Sigma^0$ — односвязная область.

Построим теперь гомеоморфное отображение областей $\mathbf{P}_{is}$ на соответствующие области $\mathbf{P}_{is'}$, квазиконформное в образе D в $\mathbf{P}_s$ и конформное в образе $S \setminus D$ в $\mathbf{P}_s$. Существование такого отображения следует из возможности квазиконформного отображения односвязных областей с любым граничным соответствием и из следующей леммы.

Лемма. *Пусть на окружности $|z|=1$ зафиксировано l точек $z_1, \ldots, z_l$ и произвольная дуга L, $z_i \in L$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$. Тогда существует конформное отображение f круга $|z|<1$ в круг $|w|<1$ такое, что $f(z_i)=w_i$, $f(L)=L_1$, $w_i \in |w|=1$, $w_i \neq w_j$, $i \neq j$, L_1 — дуга окружности $|w|=1$, положение w_i, $i=1, \ldots, l$, и L_1 — произвольное.*

Для доказательства леммы строятся односвязные области M, $M_1 \subset \{|w| \leqslant 1\}$ такие, что $\partial M \cap \{|w|=1\} = L_1$, $\partial M_1 \cap \{|w|=1\} = L_1 \cup \{w_1 \ldots w_l\}$; M — выпуклая область; M_1 — отросткообразная область, составленная из M и системы l тонких непересекающихся отростков. Каждый отросток — это криволинейный треугольник, основание которого — дуга $\subset \partial M \setminus L_1$, боковые стороны — отрезки спиралей, вершина $\in \{|w|=1\} \setminus L_1$. Существует конформное отображение φ круга $|z|<1$ на M, $\varphi(L)=L_1$, $\varphi(z_i)=w^i$, $i=1, \ldots, l$. Применение теоремы Каратеодори о сходимости областей к ядру и метода непрерывности [4] устанавливается существование конформного отображения M на M_1, переводящее систему точек w^i в вершины отростков, расположенных в точках w_i.

При доказательстве теоремы 2 поверхность S также представляется фундаментальным многоугольником Фрике $\mathbf{P}_s$ и используется теорема Пуанкаре о виде фундаментального многоугольника Фрике [5]. Если дуга положительной длины, указанная в условии теоремы 2, содержится в каноническом рассечении S, тогда ее образ в $\mathbf{P}_s$ представляет собой две отождествленные граничные дуги a и b длины >0, являющиеся противоположными сторонами криволинейного четырехугольника $Q \subset \mathbf{P}_s$, с модулем $m>0$. Если $\mathbf{P}_{s'}$ — фундаментальный многоугольник с парой отождествляемых сторон a' и b' достаточно малой длины, то не существует гомеоморфного отображения f: $\mathbf{P}_s$ на $\mathbf{P}_{s'}$, конформного в Q и такого, что $f(a) \to a'$, $f(b) \to b'$. Это следует из инвариантности модуля четырехугольника при комформных отображениях. Если дуга положительной длины, указанная в условии теоремы 2, находится в системе дуг $\Sigma^0 \setminus \Sigma$, то тогда вместо четырехугольника с парой сторон на отождествляемых частях границы $\mathbf{P}_s$ выбирается четырехугольник, противоположными сторонами которого являются дуги ε_1 и ε_j, где j — одно из $2, \ldots, n$.

Таким образом, $\mathbf{T}_0(S \setminus D) \neq \mathbf{T}_{g,n,m}$. Доказательство соотношения $\mathbf{T}(S \setminus D) \neq \mathbf{T}_{g,n,m}$ проводится аналогично с использованием квазиинвариантности модуля четырехугольника при квазиконформных отображениях.

3. В условиях теорем 1 и 2 можно ослабить условия на вид дуг, допуская в каноническом рассечении и канонической гомологической базе поверхности существование кроме точки p_0 других общих точек дуг. Если две дуги из Σ^0 кроме p_0 имеют еще общую точку p_1, тогда из системы Σ^0 можно выбрать систему Σ_1^0 такую, что Σ_1^0 разделяет S на n односвязных областей. В Σ_1^0 эта пара дуг содержит общую дугу, соединяющую точки p_0 и p_1.

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для поверхностей типа (g, n, m), имеющих конформные инварианты-модули, т. е. допускаются поверхности типов $(g \geqslant 0,\ n \geqslant 0,\ m \geqslant 4)$, $(g \geqslant 0,\ n \geqslant 2,\ m \geqslant 0)$, $(g \geqslant 1,\ n \geqslant 0,\ m \geqslant 0)$. Тогда при доказательствах теорем 1 и 2 вместо фундаментальных многоугольников Фрике берутся канонические области, полученные при рассечении S по Σ^0.

Из теорем 1 и 2 легко вытекают следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть S — поверхность типа (g, n, m), $D \subset S$ — область такая, что:* 1) *существует негомотонный единичному замкнутый путь, содержащийся в D вместе с некоторой своей окрестностью, за исключением конечного числа точек;* 2) *существует дуга, соединяющая граничные континуумы S (при $n \geqslant 2$), содержащаяся в D вместе с некоторой своей окрестностью за исключением конечного числа точек. Тогда в каждом из этих случаев $\mathrm{T}_0(S \setminus D)$ — связное множество и $\partial \mathrm{T}_0(S \setminus D) \cap \cap \partial \mathrm{T}_{g,n,m} \neq \phi$.*

Следствие 2. *Пусть K — кольцо с модулем $m \neq 0, \infty$ и D — область, лежащая в K. Тогда:* 1) *если D — двусвязная область с модулем $m_1 > 0$ и граничными компонентами D, разделяющими граничные компоненты K, то $\mathrm{T}_0(D) = (m_1, \infty)$ при $m_1 \neq m$ и $\mathrm{T}_0(D) = m$ при $m_1 = m$;* 2) *если существует кусочно-аналитическая замкнутая кривая, разделяющая граничные компоненты K, содержащаяся в D вместе с некоторой своей окрестностью за исключением конечного числа точек, то $\mathrm{T}_0(K \setminus D) = [m, \infty)$;* 3) *если D — криволинейный четырехугольник с парой противоположных сторон на разных граничных компонентах K с модулем $m_1 > 0$ относительно класса кривых, соединяющих граничные компоненты K, то $\mathrm{T}_0(D) = (0, m + 1/m_1)$ при $m_1 \neq 1/m$ и $\mathrm{T}_0(D) = m$ при $m_1 = 1/m$;* 4) *если существует кусочно-аналитическая кривая, соединяющая граничные компоненты K, содержащаяся в D вместе с некоторой своей окрестностью за исключением конечного числа точек, то $\mathrm{T}_0(K \setminus D) = (0, m]$.*

Автор выражает глубокую благодарность профессору П. П. Белинскому за внимание и советы.

Новосибирский государственный университет

Поступило 30 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Альфорс, Сборн. Л. Альфорс и Л. Берс. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, 1961, стр. 104. [2] Л. Альфорс, там же, стр. 51. [3] Л. Берс, там же, стр. 80. [4] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. [5] L. Keen, Acta Math., 115, № 1, 1 (1966). [6] L. Keen, Ann. Math., 84, № 3, 404 (1966). [7] С. Л. Крушкаль, Сибирск. матем. журн., 8, № 2, 313 (1967). [8] С. Л. Крушкаль, ДАН, 179, № 5, 1042 (1968). [9] В. Г. Шеретов, ДАН, 179, № 5, 1060 (1968). [10] М. Шиффер, Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, 1957.