Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. СТРАХОВ

О МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 1 VII 1970)

1°. Многие линейные задачи математической физики обладают неустойчивыми решениями, и по этой причине их часто называют некорректными линейными задачами ([1-7]). Однако заданием априорной информации о свойствах полезного сигнала эти задачи превращаются в корректные; поэтому их правильнее называть условно корректными ([8]).

В настоящей работе излагается подход к проблеме конструирования алгоритмов для приближенного решения линейных условно корректных задач, обобщающий используемый в настоящее время ([1-7]).

2°. Пусть X, Y — банаховы пространства, T — неограниченный линейный оператор из X в Y, $\overline{D(T)} = X$.

Задача вычисления оператора T на пространстве X поставлена некорректно:

а) $\varphi = Tf \in Y$ в том и только том случае, когда $f \in D(T)$;

б) если $f_1, f_2 \in D(T)$, то из условия $\|f_1 - f_2\| \leqslant \varepsilon$ ограниченность $\|Tf_1 - Tf_2\|$ не следует.

Проблема вычисления оператора T на пространстве X ставится так: элемент $f \in D(T)$ задан приближенно элементом $f_\delta = f + \delta f$, $\delta f \overline{\in} D(T)$. Требуется построить достаточно хорошее приближенное представление $\varphi_\delta \in Y$ элемента $\varphi = Tf \in Y$.

Если R — линейный оператор из X в Y и $D(T) \subset D(R)$, $\delta f \in D(R)$, то за φ_δ можно принять Rf_δ. Имеем

$$\|\varphi - \varphi_\delta\| = \|Tf - Rf_\delta\| \leqslant \|Tf - Rf\| + \|R\delta f\|. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что задача построения достаточно хорошего приближенного представления φ_δ становится корректной в том случае, когда относительно полезного сигнала f и помехи δf имеется определенная дополнительная информация.

В связи с этим особое значение имеет проблема характеризации и использования такой информации.

3°. Пусть θ — нулевой элемент в X, F — функционал над пространством X. Если $F(f) > 0$ при $f \neq \theta$, $F(\theta) = 0$, то функционал F будем называть положительным.

Информацию о помехе δf удобно задавать в форме

$$\delta f \in S_F(\delta), \qquad (2)$$

где $\delta > 0$ — известное число, $S_F(\delta)$ есть множество элементов ψ из $D(F)$, удовлетворяющее условию $F(\psi) \leqslant \delta$. Подходящим выбором функционала F и осуществляется учет свойств помехи.

Примеры выбора F: 1) $F(\psi) = \|\psi\|_X$ (классический выбор, употребляемый в настоящее время); 2) $F(\psi) = \|\psi\|_{L_X}$, L_X — линейное многообразие в X, $\| \ \|_{L_X}$ — норма в L_X, отличная от нормы в X; 3) $F(\psi) = \|A\psi\|_X$, A — неограниченный линейный оператор в X; 4) Пусть $X = Y = H$ — гильбертово пространство, T — самосопряженный оператор, $\sigma(T)$ — спектр оператора T, $E(\sigma)$ — разложение единицы, порождаемое оператором T.

Функционал F можно ввести равенством

$$F(\psi)=\sup_{\sigma(T)}\left|\frac{1}{k(\mu)}\frac{d(E(\mu)\psi,\psi)}{d\mu}\right|, \tag{3}$$

где $k(\mu)\in L(\sigma(T))$.

4°. Определение 1. Линейный оператор R из X в Y назовем F-ограниченным, если

$$\|R_F\|=\sup_{\psi\in D(F)}\frac{\|R\psi\|}{F(\psi)}\leq+\infty. \tag{4}$$

Величину $\|R\|_F$ будем называть нормой оператора R по функционалу F.

Следствие. *Если* $\delta f\in S_F(\delta)$, *то*

$$\sup\|R\delta f\|\leqslant\delta\|R\|_F. \tag{5}$$

5°. Пусть α — параметр, $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0<+\infty$, R_α — семейство линейных операторов из X в Y.

Определение 2. Если: 1) для всех $\alpha>0$ $D(T)\oplus D(F)\subset D(R_\alpha)$; 2) при $\alpha>0$ $\|R_\alpha\|_F<+\infty$; 3) для всех $f\in D(T)$ $\|Tf-R_\alpha f\|\to0$ при $\alpha\to0$, то семейство R_α будем называть F-регуляризующим (регуляризующим задачу вычисления оператора T на множестве $D(T)\oplus D(F)$).

Если R_α — F-регуляризующее семейство, то

$$\|Tf-R_\alpha f_\delta\|\leqslant\|Tf-R_\alpha f\|+\delta\|R_\alpha\|_F. \tag{6}$$

Замечание. Операторы F-регуляризующего семейства R_α могут и не быть ограниченными операторами из X в Y.

Определение 3. Множество M элементов $f\in D(T)$ назовем множеством равномерной F-регуляризации для семейства R_α, если: 1) для всех α $\sup\limits_{f\in M}\|Tf-R_\alpha f\|=\mu(\alpha)<+\infty$; 2) при $\alpha\to0$ $\mu(\alpha)\to0$.

Определение 4. Множество $M_\varepsilon=M\oplus m_\varepsilon$, $m_\varepsilon=[f;\ \|Tf\|\leqslant\varepsilon]$, назовем $(T-\varepsilon)$-окрестностью множества M равномерной F-регуляризации для семейства R_α.

Информация о принадлежности элементов f $(T-\varepsilon)$-окрестности некоторого множества равномерной F-регуляризации позволяет эффективно решать задачу построения достаточно хороших приближенных представлений элементов $\varphi=Tf$. 1) Пусть в представлении элемента f элементом f_δ величина δ, $F(\delta f)\leqslant\delta$, может задаваться по произволу. Тогда указанная информация позволяет находить приближенные представления $\varphi_{\delta,\alpha}=R_\alpha f_\delta$, для которых $\|\varphi-\varphi_{\delta,\alpha}\|$ сколь угодно близка к ε. 2) Пусть в представлении элемента f элементом f_δ величина δ фиксирована, но известна. Тогда приближенное представление $\varphi_{\delta,\alpha}=R_\alpha f_\delta$ при значении $\alpha=\alpha_{\text{opt}}$, определенном из условия

$$\mu(\alpha)+\delta\|R\|_F=\min_\alpha, \tag{7}$$

имеет погрешность, не превосходящую $\mu(\alpha_{\text{opt}})+\delta\|R_{\alpha\,\text{opt}}\|_F+\varepsilon$.

6°. Предположим, что $D(T)\subset D(F)$ (наиболее важный с точки зрения приложений случай).

Множество F-ограниченных линейных операторов из X в Y будем обозначать через $L_F(D(F),Y)$. Множество $m=(f;\ F(f)\leqslant K<+\infty)$ будем называть F-ограниченным.

Пусть $R\in L_F(D(F),\ Y)$ — произвольный оператор, M — множество равномерной F-регуляризации для некоторого семейства R_α. Тогда, если M — F-ограниченное множество, то

$$\sup_{f_\delta\in M\oplus S_F(\delta)}\|Tf-Rf_\delta\|<+\infty, \tag{8}$$

что следует из оценки

$$\|Tf-Rf_\delta\|\leqslant\|Tf-R_\alpha f\|+\|R_\alpha-R\|F(f)+\delta\|R\|_F. \tag{9}$$

В силу (8) в указанных условиях имеет смысл задача нахождения оператора R из условия:

$$\sup_{f_\delta \in M \oplus S_F(\delta)} \| Tf - Rf_\delta \| = \inf_{R \in L_F(D(F), L)} \tag{10}$$

Определение 5. Если решение $R = R_{\text{opt}}$ минимаксной задачи (10) существует, то оператор R_{opt} будем называть оператором построения оптимальных приближенных представлений элементов Tf на множествах M и $S_F(\delta)$, δ задано, короче F-оптимальным регуляризатором на $M \oplus S_F(\delta)$.

Определение 6. Пусть S_α, $0 < \alpha \leqslant +\infty$ — F-регуляризующее семейство линейных операторов. Если для любого δ, $0 < \delta < \delta_0$, существует такое $\alpha = \alpha(\delta)$, что S_α является F-оптимальным регуляризатором на $M \oplus S_F(\delta)$, то S_α назовем оптимальным F-регуляризующим семейством для $M \oplus D(F)$.

Определение 7. Пусть S_α, $0 < \alpha \leqslant +\infty$ — F-регуляризующее семейство линейных операторов. Если имеется бесконечная последовательность значений $\delta = \delta_n$, $\delta_n \to 0$ при $n \to 0$, для которых S_{α_n}, $\alpha_n = \alpha(\delta_n)$, являются F-оптимальными регуляризаторами на $M \oplus S_F(\delta_n)$, то семейство S_α назовем асимптотическим оптимальным F-регуляризующим семейством для $M \oplus D(F)$.

Разумность описанного подхода к проблеме построения приближенных представлений неограниченных линейных операторов иллюстрируется следующими результатами.

Теорема 1. *Пусть $X = Y = H$ — гильбертово, T — положительный самосопряженный оператор, спектр $\sigma(T)$ которого есть полупрямая $\mu \geqslant \mu_0 \geqslant 0$. Пусть $M = [f;\ \|Uf\| \leqslant N]$, где N — заданное число, а*

$$U = \varphi(T), \tag{11}$$

причем $\varphi(\mu) \geqslant 0$ — монотонно возрастающая дифференцируемая на $\sigma(T)$ функция и $\mu\varphi'(\mu) / \varphi(\mu) > 1$. Если $F = \| \quad \|_H$, то решение минимаксной задачи (10) существует для всех δ, $0 < \delta < \|U^{-1}\| N$ и доставляется оператором

$$R_{\text{opt}} = T(E + \alpha_{\text{opt}} U)^{-1}, \tag{12}$$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\delta}{\delta\varphi^{-1}(N/\delta)\,\varphi'(\varphi^{-1}(N/\delta)) - N}\,. \tag{13}$$

При этом

$$\inf_{R \in L(X,Y)} \sup_{f_\delta \in M \oplus S(\delta)} \| Tf - Rf_\delta \| = \delta\varphi^{-1}(N/\delta). \tag{14}$$

В (13—(14) $\varphi^{-1}(\mu)$ — обратная к $\varphi(\mu)$ функция, $\varphi^{-1}(\varphi(\mu)) = \mu$.

Теорема 2. *Пусть $X = Y = H$ — гильбертово, T — положительный самосопряженный оператор с чисто точечным спектром, предельная точка которого на бесконечности. Пусть множество M и оператор U определены как в теореме 1. Если $F = \| \quad \|_H$, то решение минимаксной задачи (10) существует для всех $\delta = \delta_n$, определяемых равенством*

$$\delta_n = N / \varphi(\mu_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

μ_n — собственные значения оператора T. Для этих значений δ соотношения (12) — (14) остаются в силе.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962. [2] М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, Сиб. матем. журн., 7, № 3, 559 (1966). [3] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1, 49 (1963). [4] А. Н. Тихонов, О некорректно поставленных задачах, Сборн. Вычислительные методы и программирование, в. 8, М., 1967. [5] В. К. Иванов, ДАН, 145, № 2, 270 (1962). [6] В. К. Иванов, Сиб. матем. журн., 7, № 3, 546 (1966). [7] Ю. Т. Антохин, Дифференциальн. уравнения, 3, № 7, 1135 (1967). [8] С. Г. Крейн, ДАН, 114, № 6, 1162 (1957).