Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

УДК 517.54:517.543

МАТЕМАТИКА

С. Л. КРУШКАЛЬ

НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 I 1971)

1. Рассмотрим отмеченные римановы поверхности рода $g > 1$, т. е. замкнутые римановы поверхности рода g вместе с их каноническими рассечениями, фиксированными с точностью до гомогенной деформации поверхности. В качестве конформных модулей отмеченных поверхностей будем брать любые локальные комплексные координаты соответствующих точек пространства Тейхмюллера T_g, определяющие в нем комплексно-аналитическую структуру (см. ([1-4])). Все такие координаты локально голоморфно эквивалентны.

Теорема 1. *Пусть S — отмеченная риманова поверхность рода $g > 1$ с модулями $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{3g-3})$ и E — множество положительной двумерной лебеговой меры на S.*

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой отмеченной поверхности S' рода g, модули которой $\tau' = (\tau_1', \ldots, \tau'_{3g-3})$ удовлетворяют неравенству $|\tau' - \tau| < \varepsilon_0$, существует квазиконформный гомеоморфизм $w = f(z)$ поверхности S на S', конформный ($f_{\bar z} = 0$) на множестве $S \setminus E$, причем комплексная характеристика $\mu(z) = f_{\bar z}/f_z$ удовлетворяет неравенству $\|\mu\|_{L_\infty} \leqslant M\varepsilon_0$. Постоянные ε_0 и M зависят только от S и E.

С другой стороны, если S' — произвольная отмеченная поверхность рода g, то, вообще говоря, для заданного множества $E \subset S$ может не существовать квазиконформный гомеоморфизм f: $S \to S'$, конформный на $S \setminus E$.

Будем считать, что на рассматриваемых поверхностях S и S' введены униформизирующие комплексные параметры z и w, изменяющиеся на универсальных накрывающих $\hat S$ и $\hat S'$ этих поверхностей соответственно. Пусть на поверхности S выделено множество E положительной меры и задан дивизор $\Delta = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $p_j \in S$ и $\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа, причем $\alpha_j = 0$ при $p_j \in E$, и пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — фиксированные значения параметра z, соответствующие точкам $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Теорема 2. *Пусть отмеченные поверхности S и S' имеют соответственно модули $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{3g-3})$ и $\tau' = (\tau_1', \ldots, \tau'_{3g-3})$, удовлетворяющие неравенству $|\tau' - \tau| < \varepsilon$, и задана система чисел $\{w_{m,j}\}$, $m = 0, 1, \ldots, \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $w_{0,j} \in \hat S'$,*

$$|w_{0,j} - z_j| < \varepsilon, \quad |w_{1,j} - 1| < \varepsilon, \quad |w_{m,j}| < \varepsilon,$$
$$m = 2, \ldots, \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Тогда при достаточно малом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, существует такой дифференциал Бельтрами $\mu(z)d\bar z / dz$ на S, что $\mu(z) = 0$ на $S \setminus E$ и квазиконформный гомеоморфизм $w = f(z)$ с комплексной характеристикой $\mu(z)$ является отображением S на S' и обладает следующими свойствами:

$$f^{(m)}(z_j) = w_{m,j} \quad (m = 0, 1, \ldots, \alpha_j,\ j = 1, 2, \ldots, n); \quad \|\mu\|_{L_\infty(E)} \leqslant M_1\varepsilon,$$

где постоянные ε_0 и M_1 зависят только от S, E и Δ.

Подобные утверждения имеют место для плоских областей и замкнутых поверхностей рода 1, а также для гомеоморфных компактных поверхностей с аналитическими границами и с конечным числом выколотых точек. Например, справедлива

Теорема 3. *Пусть в односвязной области $\mathscr{D}$ плоскости z выделено множество E положительной меры и конечные точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, которым сопоставлены неотрицательные целые числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ соответственно, причем $\alpha_j = 0$ для $z_j \in E$.*

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой заданной системы чисел $\{w_{m,j}\}$ $m = 0, 1, \ldots, \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих (при данных z_j и $\varepsilon = \varepsilon_0$) неравенствам (1), причем $w_{0,j} \in \mathscr{D}$ $(j = 1, \ldots, n)$, существует квазиконформный гомеоморфизм $w = f(z)$ области $\mathscr{D}$ на себя, обладающий следующими свойствами: 1) отображение f конформно на множестве $\mathscr{D} \setminus E$; 2) $f^{(m)}(z_j) = w_{m,j}$, $m = 0, 1, \ldots, \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$; 3) характеристика $\mu(z) = f_{\bar z} / f_z$ удовлетворяет неравенству $\|\mu\|_{L_\infty(E)} \leqslant M_2 \varepsilon_0$. Постоянные ε_0 и M_2 зависят только от $\mathscr{D}$, E и векторов $(z_1, \ldots, z_n)$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Если граница Γ области $\mathscr{D}$ — жорданова кривая или $\Gamma \in C_\alpha^l$, $0 < \alpha < 1$, $l \geqslant 1$, то можно брать и $z_j \in \Gamma$ с $\alpha_j = 0$ и $\alpha_j \leqslant l$ соответственно.

На эти теоремы опирается решение ряда вариационных задач теории квазиконформных отображений. Теорема 1 (вместе с продолжением на поверхности с краем) является частным случаем теоремы 2, но допускает инвариантную формулировку и сама уточняет соответствующие результаты из ([1], [4]). Другие частные случаи теоремы 2 применялись в ([5], [6]).

2. С целью иллюстрации схемы доказательства теорем 1—3 проведем его здесь для теоремы 3, когда оно упрощается.

Применением дополнительных конформных отображений доказательство теоремы 3 сводится к рассмотрению двух случаев: а) $\mathscr{D}$ — плоскость $|z| < \infty$ и $f(\infty) = \infty$; б) $\mathscr{D}$ — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, $f(\infty) = \infty$. При этом без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{D} \setminus E \neq \phi$, множество E ограничено, точки $z_j \notin E$, $j = 1, \ldots, n$, причем $\min_j \rho(z_j, E) = \rho_0 > 0$. Этого всегда можно добиться переходом к некоторому подмножеству $E_1 \subset E$, $\operatorname{mes} E_1 > 0$.

Пусть $\mathscr{D}$ — плоскость z, $f(\infty) = \infty$. Рассмотрим в $L_p(\mathscr{D})$, $p > 2$ интегральные операторы (см. ([7], [1]))

$$T_E \rho = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad \Pi\rho \equiv \partial_z T_E \rho = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

(второй интеграл понимается в смысле главного значения, $\zeta = \xi + i\eta$). Будем искать требуемый гомеоморфизм $w = f(z)$ в виде (см. ([7]), гл. II) $f(z) = z + T_E \rho$, где $\rho = \mu + \mu\Pi\mu + \mu\Pi(\mu\Pi\mu) + \ldots \equiv \mu + K\mu$, $\|\mu\|_{L_\infty(E)} < 1$ и $\mu(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \mathscr{D} \setminus E$ (тогда $K\mu \in L_p(\mathscr{D})$ при некотором $p > 2$), и постараемся найти такое μ, чтобы выполнялись условия 2), 3). В силу известных свойств операторов T_E и Π при $\|\mu\|_{L_\infty(E)} < \varepsilon_1 < 1$ имеем

$$f(z) - z = -\pi^{-1} \iint_E \mu(\zeta)(\zeta - z)^{-1}\, d\xi\, d\eta + \omega(z) \equiv h(z) + \omega(z), \tag{2}$$

$$\|\omega(z)\|_{C(|z| \leqslant R)} \leqslant M(R, \varepsilon_1) \|\mu\|^2_{L_\infty(E)} \quad (R < \infty). \tag{3}$$

Зафиксируем числа $\varepsilon_1 < 1$ и $R > \max\left(\sup_{z \in E} |z|, \max_j |z_j|\right)$. Введя обозначение $\frac{d^m}{dz^m}(f(z) - z)\big|_{z = z_j} = w'_{m,j}$, из (2) получим

$$w'_{m,j} = -m!\, \pi^{-1} \iint_E \mu(\zeta)(\zeta - z_j)^{-m-1}\, d\xi\, d\eta + \omega^{(m)}(z_j), \tag{4}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, \alpha_j, \; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Система равенств (4) определяет нелинейный оператор

$$W\mu = H\mu + \Omega\mu, \tag{5}$$

где $W\mu = (w'_{m,j})$, $H\mu = (h^{(m)}(z_j))$, $\Omega\mu = (\omega^{(m)}(z_j))$ является d-компонентными векторами *, $d = n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, действующими из множества $\{\mu: \|\mu\|_{L_\infty(\mathscr{D})} < \varepsilon_1,\ \mu(z) = 0$ при $z \in \mathscr{D} \setminus E\}$ в комплексное эвклидово пространство $\mathbf{C}^d$, причем в силу (2) — (4) $|\Omega\mu| \leqslant C_1 \|\mu\|^2_{L_\infty(E)}$, $C_1 = C_1(E, R, n, d)$, и оператор H является производной Фреше оператора W.

В линейной (комплексной) оболочке $A(E)$ функций $\varphi_{m,j}(\zeta) = (\zeta - z_j)^{-m-1}$, $\zeta \in E$, и равных нулю при $\zeta \in \mathscr{D} \setminus E$ $(m = 0, 1, \ldots, \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n)$, введем норму $\|\varphi\|_{A(E)} = \|\varphi\|_{L_\infty(\mathscr{D})}$ и будем рассматривать в (2) — (5) только $\mu(\zeta) \in A(E)$, $\|\mu\| < \varepsilon_1$. Заметим, что в силу непрерывности операторов T_E и Π в $L_p(\mathscr{D})$, $p > 2$, при $\|\mu_n - \mu_0\|_{A(E)} \to 0$ имеем $H\mu_n \to H\mu_0$, $\Omega\mu_n \to \Omega\mu_0$, т. е. оператор Ω является непрерывным на любом множестве $B_\varepsilon = \{\mu \in A(E): \|\mu\| \leqslant \varepsilon < \varepsilon_1\}$. Подставляя $\mu(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\alpha_j} c_{m,j}\varphi_{m,j}(\zeta)$ с неизвестными постоянными $c_{m,j}$ в равенство $H\mu = q$ при заданном $q \in \mathbf{C}^d$, получим для определения $c_{m,j}$ линейную алгебраическую систему уравнений, определитель которой равен $\gamma \det\left(\iint_E \varphi_{m,j}\overline{\varphi}_{k,r}\, d\xi\, d\eta\right)$, $\gamma \neq 0$, и отличен от нуля в силу линейной независимости функций $\varphi_{m,j}(\zeta)$. Следовательно, эта система имеет единственное решение и потому оператор H: $A(E) \to \mathbf{C}^d$ однозначно обратим в $\mathbf{C}^d$. Тогда из (5) для искомой характеристики $\mu(\zeta)$ имеем операторное уравнение

$$\mu = -H^{-1}\Omega\mu + \nu, \quad \nu = H^{-1}q, \tag{6}$$

где q — вектор с заданными компонентами $w'_{m,j}$.

Положим теперь $C_2 = \|H^{-1}\|_{\mathbf{C}^d}$, $M_2 = 2C_2\sqrt{d}$ и выберем $\varepsilon_2 < \min(\varepsilon_1/(2C_2)$, $1/(4C_1C_2^2))$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_2/\sqrt{d}$. Тогда, как только $\max_{m,j} |w'_{m,j}| < \varepsilon_0$, т. е. $|q| < \varepsilon_2$, то (непрерывный) оператор $Q\mu = -H^{-1}\Omega\mu + \nu$ переводит замкнутое выпуклое множество $B_{M_2\varepsilon_2}$ в себя, откуда на основании известной теоремы Шаудера — Брауэра (см. например, ([8]), стр. 507), в $B_{M_2\varepsilon_2}$ существует неподвижная точка μ_0 отображения $\lambda = Q\mu$, т. е. $\mu_0 = -H^{-1}\Omega\mu_0 + \nu$. Автоморфизм $f(z)$ плоскости z с характеристикой $\mu_0(z)$ удовлетворяет всем утверждениям теоремы 3.

Пусть теперь $\mathscr{D}$ — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, $f(\infty) = \infty$. Продолжив искомый гомеоморфизм $w = f(z)$ по принципу симметрии в полуплоскость $\mathscr{D}^*$: $\operatorname{Im} z < 0$, получим $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, откуда $\mu(\overline{z}) = \overline{\mu(z)}$ и наряду с условиями 2) должны выполняться условия $f^{(m)}(\overline{z}_j) = \overline{w}_{m,j}$ при тех же m и j. Тогда в (2) имеем $h(z) = T_{E \cup E^*}\mu$, где $E^* = \{\zeta \in \mathscr{D}^*: \overline{\zeta} \in E\}$. Заметим, что множество $V_\varepsilon = \{\mu(z) \in L_\infty(\mathscr{D} \cup \mathscr{D}^*): \|\mu\| < \varepsilon,\ \mu(\overline{z}) = \overline{\mu(z)},\ \mu(z) = 0$ вне $E \cup E^*\}$ является выпуклым при любом $\varepsilon > 0$. Добавив в (4) аналогичные равенства для точек $\overline{z}_j$, получим, что операторы W, H и Ω в (5) отображают множество V_{ε_1} в множество комплексных векторов размерности $2d$, которые наряду с компонентами $w_{m,j}'$, $h^{(m)}(z_j)$ и $\omega^{(m)}(z_j)$ содержат компоненты $\overline{w_{m,j}'}$, $\overline{h^{(m)}(z_j)}$ и $\overline{\omega^{(m)}(z_j)}$ соответственно. Рассмотрим теперь

* Компоненты их упорядочиваются так: сначала выписываются все производные до порядка α_1 в точке z_1, затем производные до порядка α_2 в точке z_2 и т. д. до точки z_n.

линейную оболочку $A(E)$ функций $\varphi_{m,j}(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_j)^{-m-1}$ и $\psi_{m,j}(\zeta) = (\zeta - z_j)^{-m-1}$, $\zeta \in E \cup E^*$, $\varphi_{m,j}(\zeta) = \psi_{m,j}(\zeta) = 0$ вне $E \cup E^*$ $(m = 0, 1, \ldots, \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n)$, с нормой $\|\varphi\|_{A(E)} = \|\varphi\|_{L_\infty(\mathscr{E} \cup \mathscr{E}^*)}$. Взяв $\mu(\zeta)$ в виде

$$\mu(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\alpha_j} [c_{m,j}\varphi_{m,j}(\zeta) + \overline{c_{m,j}}\psi_{m,j}(\zeta)]$$

и повторив предыдущие рассуждения, получим утверждение теоремы 3 для данного случая.

Приведенное доказательство с соответствующими изменениями распространяется и на случай теорем 1 и 2. При этом используются результаты работы [3], дающие вариационные формулы нужного вида для модулей.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
30 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. [2] L. Bers, On Moduli of Riemann Surfaces, Zürich, 1964. [3] С. Л. Крушкаль, ДАН, 189, № 3, 472 (1969). [4] Л. Альфорс, Л. Берс, Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, 1961. [5] С. Л. Крушкаль, ДАН, 179, № 5, 1042 (1968). [6] С. Л. Крушкаль, Сибирск. матем. журн., 8, № 2, 313 (1967). [7] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [8] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1965.