**Доклады Академии наук СССР**
**1971. Том 199, № 2**

УДК 517.53:517.947.42

*МАТЕМАТИКА*

Б. П. КУФАРЕВ

# ЕМКОСТЬ ПОДМНОЖЕСТВ ГРАНИЦЫ КАРАТЕОДОРИ И $BL$-ГОМЕОМОРФИЗМ

*(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 I 1971)*

1°. Пусть $G$ — ограниченная односвязная область в эвклидовой плоскости $R^2$, содержащая точку $z = 0$, а $\hat{G}$ — компактное расширение $G$, элементы которого суть простые концы (по Каратеодори). Для удобства мы иногда будем считать точки $z \in G$ элементами из $\hat{G}$ и писать $z \in \hat{G}$.

Известно, что пространство $\hat{G}$ метризуемо с помощью расстояния $\rho(z_1, z_2)$, определенного как inf эвклидовых диаметров простых дуг, соединяющих $z_1$ и $z_2$ в $G$ или упирающихся в границу $G$ и отделяющих $z_1$ и $z_2$ от точки $z = 0$ (см. ([1]), стр. 50).

Через $H_\rho(E)$ (соответственно $H(E)$) будем обозначать в дальнейшем 1-меру Хаусдорфа (([2]), стр. 191) множества $E$ в метрическом пространстве $\hat{G}$ (соответственно в $R^2$), и пусть $\hat{M}$ — замыкание множества $M$ в $\hat{G}$, а $K$ — неодноточечный континуум, лежащий внутри $G$.

Для множества $E \subset \hat{G}$, $\hat{E} \cap K = \phi$ пусть $\mathscr{U}$ — семейство функций $u$, которые обладают следующими свойствами:

а) они непрерывны в подпространстве $G \cup E$ (с индуцированной топологией) пространства $\hat{G}$ и обращаются в 1 на $E$;

б) они имеют в $G$ обобщенные (в смысле С. Л. Соболева) первые производные по $x$ и $y$;

в) их носители (в пространстве $\hat{G}$) лежат вне $K$:

$$\operatorname{supp} u \cap K = \phi.$$

Семейству $\mathscr{U}$ принадлежит, например, функция

$$u(z) = 1 - [\rho(K, E)]^{-1} \cdot \min[\rho(z, K), \rho(K, E)].$$

Определение. При $q > 1$ назовем $q$-емкостью множества $E$ (относительно $K$) величину

$$C_q^K(E) = \inf_{u \in \mathscr{U}} \left( \int_0^1 \frac{dt}{\| \nabla u_{\cdot} \|_{L_{q-1}(G_t)}} \right)^{1-q},$$

где $G_t = \{z \in G \mid u(z) = t\}$, а

$$\| \nabla u \|_{L_{q-1}(G_t)} = \left( \int_{G_t} | \nabla u |^{q-1} dH \right)^{1/(q-1)}.$$

Теорема 1. $C_q^K(E) = \inf\limits_{u \in \mathscr{U}} \int\limits_G | \nabla u |^q \, dx \, dy.$

Пусть далее, $\mathscr{E}$ — семейство простых дуг $\gamma$: $[0, 1] \to \hat{G}$ таких, что

$$\gamma(0) \in K, \quad \gamma(1) \in E, \quad \gamma(s) \in G \text{ при } 0 < s < 1,$$

причем кривые $\gamma(s)$, $s \in [0, 1)$, локально спрямляемы.

Теорема 2. *Емкость $C_q^K(E)$ равна $q$-модулю (по (3)) семейства $\mathscr{E}$.*

2°. Рассмотрим теперь гомеоморфизм $f(z) = (f_1, f_2)$ области $G$ в плоскость $R^2$, $z = (x, y)$, принадлежащий классу $BL^p(G)$, т. е. компоненты $f_i$ имеют в $G$ обобщенные первые производные по $x$ и $y$, принадлежащие $L_p(G)$, $p \geqslant 2$.

Известно ([1], стр. 66), что $BL^p$ — гомеоморфизм области $G$ на область $\Delta = f(G)$ можно продолжить до непрерывного отображения $\bar{G}$ на $\bar{\Delta}$.

Теорема 3. *Если гомеоморфизм $f \in BL^p(G)$, то при $p^{-1} + q^{-1} = 1$*

$$C_q^K(E) = 0 \Rightarrow H_\rho[f(E)] = 0.$$

Теорема 4. *Если $f$ — $Q$-квазиконформное отображение, то $C_2^K(E) = 0 \Rightarrow C_2^{f(K)}(f(E)) = 0$.*

Замечание 1. Для теорем 1, 2 и 4 можно сформулировать пространственные аналоги, если в качестве $\rho$ взять, например, расстояние, которое используется в работе [4].

Замечание 2. В октябре 1970 г. на Донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений и ее обобщениям мне стало известно, что аналогичное понятие емкости независимо определил и исследовал В. М. Миклюков, хотя его результаты были еще не опубликованы.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
30 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965. [2] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, М., 1962. [3] B. Fuglede, Acta Math., 98, 171 (1957). [4] И. С. Овчинников, Г. Д. Суворов, Сиб. матем. журн., 6, № 6, 1292 (1965).