Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

[illegible]

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик КиргССР М. Я. ЛЕОНОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматривается однородная модель твердого тела, имеющая непрерывно распределенные подвижные дефекты типа дислокаций. Компоненты тензора деформаций предполагаются малыми (ограничиваются несколькими процентами); скорости их изменения таковы, что влиянием времени можно пренебречь. Пластическая деформация определяется через интенсивность перемещений (локальных скольжений) дислокаций, которые происходят по множеству (вееру) плоскостей и вееру направлений в плоскостях скольжения.

Препятствия различного рода оказывают сопротивление перемещению дислокаций, которое также зависит и от взаимного расположения дислокаций. Предполагается, что сопротивление скольжению не зависит от порядка (истории), в котором произведено перемещение дислокаций, и что эти перемещения взаимно однозначно связаны с локальными скольжениями. Это утверждение называется [1] постулатом антиизотропии, так как оно исключает изотропное упрочнение и гистерезис в смещениях дислокаций. Названный постулат имеет то же значение для теории пластичности, что и пренебрежение упругим последействием и гистерезисом в теории упругости. Циклические нагрузки исключаются из рассмотрения.

1. Разупрочнение от упругих деформаций. Рассматриваются материалы, для которых пределы упругости при одноосном растяжении и сжатии одинаковы. Для таких материалов принимается

Аксиома I. *При пропорциональном нагружении за предел упругости веер скольжений заключает в себе плоскости и направления максимального касательного напряжения.*

Следствие. *Максимальное касательное напряжение в процессе пропорционального нагружения за предел упругости равно сопротивлению пластическому сдвигу в направлении этого напряжения.*

Сопротивление сдвигу в направлении m действия максимального касательного напряжения представим в виде

$$S_m(\tau_i) = f(\tau_i)(1 + L_m\varphi), \tag{1}$$

где $f(\tau_i)$ — функция интенсивности касательных напряжений, подлежащая определению, $L_m\varphi$ — пока произвольный линейный оператор от интенсивности скольжений, удовлетворяющий постулату антиизотропии,

$$L_{-m}\varphi = -L_m\varphi, \tag{2}$$

и условию непрерывности при $\varphi \equiv 0$, т. е.

$$L_m\varphi|_{\varphi\equiv 0} = 0. \tag{3}$$

Используя последнее условие в формуле (1), найдем, что при достижении предела упругости

$$\tau_{max} = f(\tau_i) \quad (S_m = \tau_{max},\ \varphi \equiv 0), \tag{4}$$

т. е. искомая функция равна максимальному касательному напряжению при достижении предела упругости. Меняя вид напряженного состояния, можем найти по формуле (4) функцию $f(\tau_i)$ в некоторой области, которую мы будем предполагать малой (но не точкой — условие пластичности Губера пока исключается из рассмотрения). Расширим эту область.

Заметим, что для упорядочняющихся материалов оператор $L_m\varphi$ в процессе пропорционального нагружения должен расти. Поэтому сопротивление сдвигу в направлении $-m$, противоположном направлению максимального касательного напряжения, будет убывать (в этом направлении происходит самое быстрое убывание). Следовательно, при нагружении в обратную сторону пластическая деформация будет всегда включать скольжение в направлении максимального касательного напряжения.

Обозначим через x значение τ_i, при котором начинается разгрузка после пропорционального нагружения, а через $Э(x)$ — значение интенсивности касательных напряжений, при которой возникает пластическая деформация при пропорциональном уменьшении нагрузок (с изменением их знака). Определяя соответствующие этим моментам максимальные касательные напряжения и приравнивая их $S_m(x)$, $S_{-m}[Э(x)]$, будем иметь

$$S_m(x) = f(x)(1 + L_m\varphi), \qquad S_{-m}[Э(x)] = f[Э(x)](1 - L_m\varphi),$$

т. е.

$$S_m(x)/f(x) + S_{-m}[Э(x)]/f[Э(x)] = 2.$$

При растяжении (сжатии) имеем $\tau_m = {}^3/_4\sqrt{2}\tau_i$, и предыдущее уравнение принимает вид

$$x\,/\,f(x) + Э_р(x)\,/\,f[Э_р(x)] = {}^4/_3\sqrt{2},$$

а при чистом сдвиге (кручении) $\tau_m = \sqrt{{}^2/_3}\tau_i$, т. е.

$$x/f(x) + Э_к(x)/f[Э_к(x)] = 2\sqrt{{}^2/_3},$$

причем индексы «р» и «к» указывают значения функции $Э(x)$ при растяжении и кручении соответственно.

В силу эффекта Баушингера имеем $Э(x) < x$. Поэтому формула (6) или (7) позволяет определить функцию $f(\tau_i)$ в любом интервале, если известно ее значение в любой конечной области и если известна функция $Э(x)$.

Из формул (6) и (7) следует, что материалы, которые подчиняются принятым здесь допущениям, должны удовлетворять условию

$$Э_р(x)/f[Э_р(x)] - Э_к(x)/f[Э_к(x)] = {}^2/_3\sqrt{2}(2 - \sqrt{3}),$$

связывающему эффекты Баушингера при растяжении и кручении.

Из эксперимента и теории вытекает, что

$$f(\tau_i) \geqslant 0, \qquad f'(\tau_i) \leqslant 0.$$

Последнее условие обобщим в виде следующей аксиомы.

Аксиома II. *При возрастании любых компонент касательных напряжений приращение сопротивления сдвигу от упругих деформаций всегда отрицательно.*

Из этой аксиомы следует

Лемма. *Пусть задана компонента τ_{nl} касательного напряжения в плоскости с нормалью n, в направлении l; если при τ_{nl}=const касательные напряжения растут во всех направлениях, то приращение сопротивления S_{nl} сдвигу в указанном направлении за счет упругих деформаций будет отрицательным.*

Следствие. *Если для заданного напряженного состояния (τ_i, τ_m = const) касательное напряжение τ_{nl} уменьшается с изменением направлений n и l, то сопротивление (S_{nl}) сдвигу за счет влияний только упругих деформаций будет уменьшаться.*

Указанное следствие, очевидно, имеет связь с фактом монотонного убывания функций $f(\tau_i)$. Обобщая в простейшей форме все вышеуказанное, можем представить сопротивление сдвигу в любой плоскости (n) и направнение (2) для малых пластических деформаций следующим образом:

$$S_{nl} = f(\tau_i)(1 + L_{nl}\varphi) + \nu f'(\tau_i)(\tau_m - \tau_{nl}) \quad (\nu > 0), \tag{10}$$

где L_{nl} — линейный оператор, удовлетворяющий в силу постулата антиизотропии условию

$$L_{n,l}\varphi = -L_{n,-l}\varphi \tag{11}$$

Перед возникновением пластической деформации $[f(\tau_i) = \tau_m]$ сопротивление сдвигу в произвольном направлении будет

$$S_{nl}|_{\varphi\equiv 0} = \tau_m + \nu f'(\tau_m - \tau_{nl}). \tag{12}$$

Из аксиомы I следует, что условие для скольжения в произвольном направлении l не может возникнуть раньше, чем в направлении m максимального касательного напряжения, т. е.

$$\tau_m + \nu f'(\tau_i)(\tau_m - \tau_{nl}) \geqslant \tau_{nl}.$$

Таким образом,

$$(\tau_m - \tau_{nl})[1 + \nu f'(\tau_i)] \geqslant 0, \quad \nu f'(\tau_i) \geqslant -1. \tag{13}$$

Учитывая, что $f'(\tau_i)$ принимает отрицательные значения, удовлетворим последнему условию полагая, например,

$$\nu = 1/[h - f'(\tau_i)], \quad h = \text{const} > 0. \tag{14}$$

2. Этапы малой пластической деформации. 1°. В начале возникновения пластической деформации веер плоскостей и направлений, по которым происходят скольжения, является малым (порядка десятка градусов). При этом касательный модуль мало отличается от упругого, и можно положить

$$L_{nl}\varphi = a\varphi_{nl} \quad (a = \text{const}), \tag{15}$$

т. е. упрочнение от пластического скольжения в направлении l пропорционально интенсивности скольжений в этом направлении.

2°. Переходным этапом назовем такой процесс пластической деформации, когда происходит быстрое уменьшение касательного модуля и достигается предел текучести. На этом этапе сопротивление сдвигу S_{nl} будем считать зависящим от скольжений только в одной плоскости, имеющей нормаль n. В частности, можно считать, что

$$L_{nl}\varphi = a\varphi_{nl} - b\int_{\mathscr{D}} \varphi_{nl_1} \cos\omega_{ll_1} d\omega_{ll_1}, \tag{16}$$

где ω_{ll_1} — угол между направлением l, в котором ищется сопротивление сдвигу, и направлением l_1, в котором произошло скольжение, $\mathscr{D}$ — область скольжения.

3°. На третьем этапе веер скольжений включает в себя почти все плоскости и направления в них. При этом можно принять

$$L_{nl}\varphi = a\varphi_{nl} - b\int_{\mathscr{D}} \varphi_{nl_1} \cos\omega_{ll_1} d\omega_{ll_1} + c\gamma_{nl}, \tag{17}$$

где γ_{nl} — компонента тензора пластической деформации от всех скольжений, $a, b, c = \text{const}$.

Институт физики и математики
Академии наук КиргССР
Фрунзе

Поступило
25 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Леонов, ДАН, 199, № 1, (1971).