О конечных группах, N-критический граф которых является цепью

В. И. Мурашко

Все рассматриваемые группы конечны. Используются стандартные обозначения и терминология (см. [**1**]). Напомним, что через $E(\Gamma)$ обозначается множество рёбер графа Γ, через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, группой Шмидта называется ненильпотентная группа все собственные подгруппы которой нильпотентны, (p,q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G для которой $\pi(G)=\{p,q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

Определение (Определение 1.4 [**2**]). N-критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p,q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p,q)-подгруппа Шмидта.

Из свойств N-критическим графа группы G можно извлечь содержательную информацию о строении самой группы G. Например:

(1) Если $\pi_1,\dots,\pi_n$ — множества вершин компонент связности графа $\Gamma_{Nc}(G)$, то $G=\mathrm{O}_{\pi_1}(G)\times\dots\times\mathrm{O}_{\pi_n}(G)$ по по теореме 5.14 из [**2**]. В частности, если все π_i одноэлементны, то G нильпотентна.

(2) Если $\Gamma_{Nc}(G)$ не имеет циклов, то G дисперсивна по теореме 5.12 из [**2**].

(3) Если $E(\Gamma_{Nc}(G))\subseteq\{(p_i,p_j)\mid p_j\in\pi(p_i-1)\}$, то все подгруппы Шмидта группы G сверхразрешимы. Данный группы исследовались В. С. Монаховым [**3**].

В данной работе мы получили описание групп, N-критический граф которых является цепью:

Теорема. *Пусть G — группа и $\pi(G)=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) $E(\Gamma_{Nc}(G))\subseteq\{(p_i,p_{i+1})\mid i=1,\dots,n-1\}$.

(b) *Выполняются утверждения*:

(1) *Если $|i-j|\geq 2$, то всякий p_i-элемент группы G перестановочен со всяким p_j-элементом группы G.*

(2) *Если $j-i=1$, то всякий p_j-элемент группы G перестановочен со всякой силовской p_i-подгруппой группы G.*

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ Ф17РМ-063.

Список литературы

[1] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[2] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. Arithmetic graphs of finite groups // ArXiv.org e-Print archive, arXiv: 1510.02568v1v1, 9 Oct 2015.
[3] Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Т. 58, N 5. С. 717–722.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: mvimath@yandex.ru