О построении арифметических графов конечных групп

А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G — некоторая группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка G. В 1968 Т. Хоукс [**1**] рассмотрел ориентированный граф $\Gamma_H(G)$ группы G, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$ и (p,q) является ребром, если $q \in \pi(G/\mathrm{O}_{p',p}(G))$. Согласно [**2**] силовским графом $\Gamma_s(G)$ называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p,q) является ребром $\Gamma_s(G)$, если $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G. Ориентированный граф $\Gamma_{Nc}(G)$ с множеством вершин $\pi(G)$ и ребер (p,q), если в G имеется (p,q)-подгруппа Шмидта, называется N-критическим графом группы G [**3**].

Мы предлагаем общую конструкцию построения таких графов.

Определение 1. Функцию f назовем секционным функтором, если f ставит в соответствие каждой группе G (возможно пустое) множество $f(G)$ секций группы G, удовлетворяющее $\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$ для любого изоморфизма $\alpha : G \to G^*$.

Определение 2. Пусть θ — функция, которая каждому простому числу p ставит в соответствие секционный функтор θ_p.

(1) Γ_θ назовем θ-локальной арифметической графовой функцией, если $V(\Gamma_\theta(G)) = \pi(G)$ и $(p,q) \in E(\Gamma_\theta(G))$, если $q \in \pi(\{N_G(P)/C_G(P) | P \in \theta_p(G)\})$.

(2) $\Gamma_{\overline{\theta}}$ назовем $\overline{\theta}$–локальной арифметической графовой функцией, если $V(\Gamma_{\overline{\theta}}(G)) = \pi(G)$ и $(p,q) \in E(\Gamma_{\overline{\theta}}(G))$, если $q \neq p$ и $q \in \pi(\{N_G(P)/C_G(P) | P \in \theta_p(G)\})$.

Предложение 1. *Пусть θ — функция, которая каждому простому числу p ставит в соответствие секционный функтор θ_p. Тогда*:

(1) *Если $\theta_p(G)$ — множество всех главных p-факторов G, то $\Gamma_\theta(G) = \Gamma_H(G)$.*

(2) *Если $\theta_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп G, то $\Gamma_{\overline{\theta}}(G) = \Gamma_s(G)$.*

(3) *Если $\theta_p(G)$ — множество всех p-подгрупп G, то $\Gamma_{\overline{\theta}}(G) = \Gamma_{Nc}(G)$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q | (p,q) \in E(\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))\} \cup \{p\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *$\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимо насыщенная формация Шеметкова.*

(2) *π-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P)$ принадлежит $\mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для любой p-подгруппы P группы G и для любого $p \in \pi$.*

Список литературы

[1] Hawkes T. On the class of the Sylow tower groups // Math. Z. 1968. N 105. P. 393–398.

[2] D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Lattice formations and Sylow normalizers: a conjecture // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell Universita di Modena e Reggio Emilia. 2007. N 55. P. 107–112.

[3] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. Arithmetic graphs of finite groups // ArXiv.org e-Print archive, arXiv: 1510.02568v1v1, 9 Oct 2015.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: formation56@mail.ru, mvimath@yandex.ru