2. Gaschütz W. *Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen* // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160–170.

3. Deskins W. E. *A condition for the solvability of a finite group* // Ill.J.Math. 1961. Vol. 5. № 2, P. 306–313.

4. Селькин М. В. *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп.* Мн.: Беларуская навука, 1997.

5. Скиба А. Н. *Алгебра формаций.* Мн.: Беларуская навука, 1997.

6. Бородич Р. В. *Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами* / Бородич Р.В., Бородич Е.Н., Селькин М.В. // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 2, — с. 33–39.

———————————————————————————

УДК 512.542

Конечные группы с заданным вложением силовских подгрупп

А. Ф. Васильев (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: formation56@mail.ru

Finite groups with a given embedding of Sylow subgroups

A. F. Vasil'ev (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: formation56@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Знание свойств вложения силовских подгрупп в группу позволяет во многих случаях получить существенную информацию о самой группе. Например, группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда ее силовские подгруппы нормальны (субнормальны) в G. Согласно известной теореме Глаубермана [1], если все силовские подгруппы группы самонормализуемы, то группа является p-группой для некоторого простого числа p.

Хорошо известны [2] следующие обобщения понятия субнормальности. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы называется: *$\mathfrak{F}$-субнормальной в* G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$; K-*$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, всякая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа является субнормальной, обратное утверждение в общем случае неверно. Однако в разрешимых группах эти понятия эквивалентны.

Отметим, что в любой группе всякая субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной, обратное утверждение верно не всегда. Для случая $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ понятия субнормальной и K-$\mathfrak{N}$-субнормальной подгрупп эквивалентны.

В монографии [2] нашли отражение результаты многочисленных работ, в которых изучались свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных, K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения.

В [3] были начаты исследования влияния $\mathfrak{F}$-субнормальных силовских подгрупп на строение всей группы, где $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. В [4, 5] были исследованы классы $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для p из π все силовские p-подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными, соответственно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными в G.

Хорошо известно, какую важную роль играют свойства нормализаторов неединичных примарных подгрупп (локальных подгрупп) при классификации конечных простых неабелевых групп. В последние годы локальные подгруппы активно используются при изучении непростых, в частности, разрешимых групп. В 1986 году в работе [6] было установлено, что группа нильпотентна, если нормализаторы ее силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) нильпотентны. В [7] приведен обзор работ, в которых изучались группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами, а также группы с принадлежащими насыщенной формации $\mathfrak{F}$ силовскими нормализаторами.

Работы [8, 9] послужили мотивацией для начала исследования групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими нормализаторами [10].

Определение 1. *[10] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация групп. Подгруппа H группы G называется сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной в G, если $N_G(H)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

Отметим, что подгруппа нормальна в своем нормализаторе. Поэтому в любой группе всякая сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной. Обратное утверждение неверно, например, для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Пусть S — симметрическая группа степени 3, U — точный неприводимый S-модуль над полем F_7 из 7 элементов, группа $G = [U]S$. Из неабелевости S следует, что G не является сверхразрешимой. Так как G/U сверхразрешима, подгруппа $H = UQ$ является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой группы G, где Q — силовская 3-подгруппа группы G, лежащая в S. Из сверхразрешимости H следует, что Q K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Заметим, что подгруппа Q не является сильно K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Это следует из того, что нормализатор Q в G равен подгруппе S, которая не является нормальной и $\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Определение 2. *Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации $\mathfrak{F}$ через $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для любого $q \in \pi\cap\pi(G)$ всякая силовская q-подгруппа является сильно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G.*

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, будем обозначать $\mathrm{w}^*_{\mathbb{P}}\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$. Отметим, если $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi \cap \pi(G) = \emptyset$, то $N_G(1) = G$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$.
(2) $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ — *формация.*
(3) $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*_\pi(\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F})$.

Пусть p — простое число. Через $l_p(G)$ обозначается p-длина p-разрешимой группы G. Арифметическая длина — это $al(G) = \mathrm{Max}\, l_p(G)$, когда p пробегает все простые числа. $\mathfrak{L}_a(n)$ — класс всех разрешимых групп, арифметическая длина которых $al(G) \leq n$, $\mathfrak{L}_a(1)$ — класс всех разрешимых групп с $al(G) \leq 1$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда и только тогда группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi'} \times \mathfrak{F}$, когда все ее силовские подгруппы являются сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальными в G.*

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *наследственная насыщенная формация такая, что* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$ *и* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. *Тогда и только тогда группа* G *принадлежит формации* $\mathfrak{F}$, *когда все ее силовские подгруппы являются сильно* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальными в* G, *т. е.* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие 2. *[8] Если нормализатор любой силовской подгруппы группы* G *является* $\mathfrak{U}$-*субнормальной подгруппой в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 3. *[10] Пусть* $\mathfrak{F}$ — *формация всех метанильпотентных групп. Тогда и только тогда* $G \in \mathfrak{F}$, *когда нормализатор любой силовской подгруппы группы* G *является* $\mathfrak{F}$-*субнормальной подгруппой в* G.

Следствие 4. *[10] Пусть* $\mathfrak{F}$ — *формация всех групп с нильпотентным коммутантом. Тогда и только тогда* $G \in \mathfrak{F}$, *когда нормализатор любой силовской подгруппы группы* G *является* $\mathfrak{F}$-*субнормальной подгруппой в* G.

Следствие 5. *Тогда и только тогда* $G \in \mathfrak{L}_a(1)$, *когда нормализатор любой силовской подгруппы группы* G *является* $\mathfrak{L}_a(1)$-*субнормальной подгруппой в* G.

Отметим, что в общем случае $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ — формация всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит 3. Обозначим $M = S_4$, где S_4 — симметрическая группа степени 4. Известно, что существует точный неприводимый M-модуль U над полем F_3 из 3 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]M$. Заметим, что нильпотентная длина G равна 4 и $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как подгруппа M является минимальной не $\mathfrak{N}^2$-группой, то G — минимальная не $\mathfrak{N}^3$-группа. Отметим также, что G имеет арифметическую длину $al(G) = 2$. Нетрудно видеть, что нормализаторы ее силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами в G, но сама группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathrm{w}^*\mathfrak{N}^3 \neq \mathfrak{N}^3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glaubermann G. Prime-power factor groups of finite groups II // Math. Z. 1970. № 117. P. 46–56.
2. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. — Dordrecht: Springer-Verl., 2006. 385 p.
3. Васильев А. Ф. О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 31–39.
4. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. N 4(9). С. 86–91.
5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.
6. Bianchi M. G., Gillio Berta Mayri A., Hauck P. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 193–197.
7. D'Aniello A., Kazarin L. S., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. A Survey on Sylow Normalizers and Classes of groups // Appl. Math. Sci. 2014. V. 8, № 134. P. 6745–6752.
8. Kniahina V. N., Monakhov V. S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Internat. J. of Group Theory. 2013. V.2, № 4. P. 21–29.

9. Васильев В. А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. 2016. № 2(91). С. 17–21.

10. Васильев А. Ф. Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 66–71.

УДК 511.32

Об определяемости факторно делимых групп их группами автоморфизмов

В. К. Вильданов (Россия, г. Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail:kadirovi4@gmail.com

On the definability of quotient divisible groups by their automorphism groups

V. K. Vildanov (Russia, Nizhny Novgorod)
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
e-mail:kadirovi4@gmail.com

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Смешанные факторно делимые группы конечного ранга определили А. А. Фомин и У. Уиклесс в работе [1]. Группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F – периодическая делимая группа.

Вопрос определяемости факторно делимой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов в классе всех таких групп рассмотрен в работе [4]. Определяемость факторно делимых групп своими полугруппами эндоморфизмов рассматривались в работах [2],[3].

Класс всех факторно делимых групп ранга 1 обозначим $\mathcal{QD}_1$. Кроме того, нам потребуется следующее

Определение 1. *Будем говорить, что конечная циклическая группа A* слабо определяется своей группой автоморфизмов*, если для любой конечной циклической группы $B \ncong A$ из условия* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ *следует, что число ненулевых компонент B_p группы B больше, чем число ненулевых компонент A_p группы A.*

Предложение 1. [4, Теорема 3] *Группа $A \in \mathcal{QD}_1$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_1$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{t}(A)$ *— циклическая группа (возможно, нулевая), слабо определяющаяся своей группой автоморфизмов, и $pA \neq A$ для всех $p \in \mathbb{P}$ таких, что $A_p = 0$.*

Назовем группу G вполне разложимой факторно делимой группой, если $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $A_i \in \mathcal{QD}_1$. Класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}_{cd}$. Группу G из $\mathcal{QD}_{cd}$ назовем однородной, если $G = \bigoplus_n A$, где $A \in \mathcal{QD}_1$, класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}^*$.

Предложение 2. *Группа $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}^*$, если группа A определяется в классе $\mathcal{QD}_1$ своей группой автоморфизмов.*