УДК 512.542

А.Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т.Н. ВАСИЛЬЕВА

НОРМАЛИЗАТОРНЫЕ ПОДГРУППОВЫЕ ФУНКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

A new series soluble transitive regular subgroup functors is found. Authors introduced a concept of a normalizer subgroup functor and apply it for the construction of Schunck classes of finite soluble groups.

Пусть $\boldsymbol{Y}$ - некоторый непустой класс групп. Отображение τ, которое ставит в соответствие каждой группе $G\in \boldsymbol{Y}$ некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым $\boldsymbol{Y}$-функтором [1], если $(\tau(G))^{\alpha}=\tau(G^{\alpha})$ для любого изоморфизма α группы $G\in \boldsymbol{Y}$.

Пусть A и B - группы, $\varphi: A\to B$ - эпиморфизм. Если Ω **и** Σ - некоторые системы подгрупп из A и B соответственно, то обозначим $\Omega^{\varphi}=\{H^{\varphi}|H\in\Omega\}$ - множество всех образов в B всех подгрупп из Ω, а $\Sigma^{\varphi^{-1}}=\{R^{\varphi^{-1}}\mid R\in\Sigma\}$ - множество всех полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Далее в работе $\boldsymbol{Y}$ обозначает некоторый класс групп, замкнутый относительно подгрупп и гомоморфных образов.

Подгрупповой $\boldsymbol{Y}$-функтор τ называется:

1) регулярным ($\boldsymbol{Y}$-функтором в смысле Скибы) [1], если $(\tau(A))^{\varphi}\subseteq\tau(B)$ и $(\tau(B))^{\varphi^{-1}}\subseteq\tau(A)$ для любого эпиморфизма $\varphi: A\to B$, где $A, B\in \boldsymbol{Y}$;

2) транзитивным [1], если из $S\in\tau(H)$ и $H\in\tau(G)$ всегда следует, что $S\in\tau(G)$ для любой группы $G\in \boldsymbol{Y}$.

Примерами транзитивных регулярных подгрупповых функторов являются функторы, выделяющие в каждой конечной группе G множество $S(G)$ всех ее подгрупп; множество $\{G\}$; множество $sn(G)$ всех ее субнормальных подгрупп.

А.Н. Скибой [2, вопрос 1.2.12] была поставлена проблема классификации всех транзитивных регулярных подгрупповых функторов. Данная проблема является трудной и далека от своего решения. Известны [1] только некоторые серии ($\boldsymbol{F}$-субнормальные, $\boldsymbol{F}$-достижимые, $\boldsymbol{F}$-субабнормальные подгрупповые функторы) транзитивных регулярных подгрупповых функторов. В [3] были полностью описаны разрешимые транзитивные регулярные подгрупповые функторы с дополнительными условиями наследственности для подгрупп и решеточными свойствами.

В настоящей работе приводится новая серия разрешимых транзитивных регулярных подгрупповых функторов. С помощью введенных нормализаторных подгрупповых функторов строятся новые классы Шунка.

Рассматриваемая нами конструкция является функторным обобщением введенного Манном [4] понятия X-нормальной подгруппы конечной группы.

Рассматриваются только конечные группы. В обозначениях и определениях мы следуем принятым в работе [1]. Напомним некоторые из них. Разрешимый подгрупповой функтор - это подгрупповой $\boldsymbol{Y}$-функтор в случае, когда $\boldsymbol{Y}$ есть класс всех разрешимых групп. Классом Шунка называется непустой замкнутый относительно гомоморфных образов класс X, содержащий всякую группу, у которой все примитивные фактор-группы принадлежат X. Для класса групп X подгруппа H называется X-проектором группы G, если для любой нормальной подгруппы N из G фактор-группа HN/N является максимальной X-подгруппой в G/N.

Центральным в работе является следующее

Определение 1. Пусть τ - подгрупповой $\boldsymbol{Y}$-функтор, $G\in \boldsymbol{Y}$. Подгруппу R группы G будем называть τ-*нормализатором подгруппы* H *в* G, если выполняются следующие условия:

1) $H\in\tau(R)$;

2) из $H\in\tau(L)$ для подгруппы L группы G всегда следует $L\subseteq R$.

Для τ-нормализатора R подгруппы H в G будем использовать обозначение $N_G^{\tau}(H)$

Подгрупповой Y-функтор τ будем называть *нормализаторным,* если всякая подгруппа группы $G\in Y$ обладает τ -нормализатором в G.

Заметим, что если $\tau=S_n$ - нормальный подгрупповой функтор, т. е. подгрупповой функтор, который в каждой группе выделяет все ее нормальные подгруппы, то $N_G^{S_n}(H)=N_G(H)$ - нормализатор подгруппы H в G. Однако не всякий подгрупповой У-функтор является нормализаторным. Например, если $\tau=sn$ - субнормальный подгрупповой функтор, т. е. подгрупповой функтор, который в каждой группе выделяет все ее субнормальные подгруппы, то подгруппа H группы G может не иметь sn-нормализатора (см., например, [5]).

Определение 2. Пусть τ - подгрупповой Y-функтор, $G\in Y$. Подгруппу H группы G будем называть X_τ *-нормальной в G,* если либо $H=G$, либо для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi\neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная подгруппа, содержащая H^φ и принадлежащая $\tau(G^\varphi)$

Введем отображение τ^*, которое ставит в соответствие каждой группе $G\in Y$ множество $\tau^*(G)$ всех X_τ-нормальных в G подгрупп.

Отметим, что если $\tau=S_n$, то определение X_{S_n} -нормальной в G подгруппы совпадает с введенным Манном [4] определением X-нормальной в G подгруппы.

Лемма 1. *Пусть τ - подгрупповой Y-функтор, H - подгруппа группы $G\in Y$ Тогда* $N_{G^\alpha}^{\tau}(H^\alpha)=(N_G^{\tau}(H))^\alpha$ *для любого изоморфизма* ***a*** *группы G.*

Доказательство прямо следует из определений подгруппового Y-функтора и τ-нормализатора.

Лемма 2. *Пусть τ - подгрупповой Y-функтор и $G\in$ У. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) τ^* *- подгрупповой Y-функтор;*

2) *еслт*τ_1 *— подгрупповой Y-функтор* $\tau_1(G)\subseteq\tau(G)$, *то* $\tau_1{}^*(G)\subseteq\tau^*(G)$;

3) $(\tau(G))^\varphi\subseteq\tau(G^\varphi)$ *для любого эпиморфизм*φ*группы G, то* $\tau(G)\subseteq\tau^*(G)$.

Доказательство осуществляется прямой проверкой.

Лемма 3. *Пусть* т *—регулярный подгрупповой Y-функтор и N — нормальная подгруппа группы* $G\in Y$. *Тогда:*

1) *если H и R — подгруппы группы G такие, что* $H\subseteq R$ *и* $H\in\tau^*(R)$, *то* $HN/N\in\tau^*(RN/N)$;

2) *если* $N\subseteq H$ *и* $H/N\in\tau^*(G/N)$, *то* $H\in\tau^*(G)$.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения 1). Пусть $HN/N\neq RN/N$. Рассмотрим любой эпиморфизм φ группы RN/N такой, что $(HN/N)^\varphi\neq(RN/N)^\varphi$, и обозначим $T/N=\mathrm{Ker}\varphi$. Тогда фактор-группа $HN/N\cdot T/N/T/N\neq$ $\neq RN/N/T/N$. Поэтому $HT/T\neq RT/T$. Пусть α - изоморфизм группы $R/R\cap T$, для которого $(R/R\cap T)^\alpha=RT/T$. Так как $HT/T\cong H(R\cap T)/R\cap T$, то $H(R\cap T)/R\cap T\neq R/R\cap T$. Ввиду того, что $H\in\tau^*(R)$, в $R/R\cap T$ найдется собственная подгруппа $K/R\cap T$ такая, что $H(R\cap T)/R\cap T\subseteq K/R\cap T\in\tau(R/R\cap T)$. Из условий $KT/T\cong K/R\cap T\neq R/R\cap T$ следует, что $KT/T\neq RT/T$. Но тогда $HT/T=(H(R\cap T)/R\cap T)^\alpha\subseteq(K/R\cap T)^\alpha\in(\tau(R/R\cap T))^\alpha=$ $=\tau(RT/T)$. Отсюда $(HN/N)^\varphi\subseteq(KN/N)^\varphi\neq(RN/N)^\varphi$ и $(KN/N)^\varphi\in\tau((RN/N)^\varphi)$, т. е. $HN/N\in\tau^*(RN/N)$.

Докажем утверждение 2). Пусть $H/N\in\tau^*(G/N)$. Можно считать, что $H\neq G$. Предположим, что φ - любой эпиморфизм группы G, для которого $H^\varphi\neq G^\varphi$

Обозначим $\mathrm{Ker}\varphi=T$. Тогда $HT/T\neq G/T$. Пусть ψ - естественный гомоморфизм группы G с $\mathrm{Ker}\psi=N$. Тогда фактор-группа $H/N\cdot TN/N/TN/N\cong HT/TN\neq$ $\neq G/TN\cong G/N/TN/N$. Рассмотрим естественный гомоморфизм φ_1 группы G/N с $\mathrm{Ker}\varphi_1=TN/N$. Тогда $(G/N)^{\varphi_1}=G/N/TN/N$ и $(H/N)^{\varphi_1}=H/N\cdot TN/N/TN/N$. Так как $H/N\in\tau^*(G/N)$, в $G/N/TN/N$ найдется собственная подгруппа $K/N/TN/N$ такая, что $H/N\cdot TN/N/TN/N\subseteq K/N/TN/N$ и $K/N/TN/N\in\tau(G/N/TN/N)$. Так как τ - регулярный подгрупповой F-функтор, то $K\in\tau(G)$. Тогда $HT/T\subseteq K/T\neq G/T$ и $K/T\in\tau(G/T)$. Итак, $H\in\tau^*(G)$. Лемма доказана.

Подгрупповые F-функторы τ_1 и τ_2 будем называть равными и обозначать $\tau_1=\tau_2$, если $\tau_1(G)=\tau_2(G)$ для любой группы $G\in Y$.

Лемма 4. *Пусть τ - регулярный подгрупповой Y-функтор. Тогда τ^* является транзитивным регулярным подгрупповым Y-функтором и $(\tau^*)^*=\tau^*$.*

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что τ^* - регулярный подгрупповой F-функтор.

Докажем, что подгрупповой F-функтор τ^* является транзитивным. Пусть $G\in Y$, $S\in\tau^*(H)$ и $H\in\tau^*(G)$. Покажем, что $S\in\tau^*(G)$. Можно считать, что $S\neq H\neq G$. Возьмем любой эпиморфизм φ группы G такой, что $S^\varphi\neq G^\varphi$. Если $H^\varphi\neq G^\varphi$, то ввиду $H\in\tau^*(G)$ в G^φ найдется собственная подгруппа K^φ такая, что $H^\varphi\subseteq K^\varphi\in\tau(G^\varphi)$. Но тогда $S^\varphi\subseteq K^\varphi\neq G^\varphi$. Если $H^\varphi=G^\varphi$, то φ - эпиморфизм Я и $S^\varphi\neq H^\varphi$. Поэтому S^φ содержится в собственной подгруппе K^φ группы $H^\varphi=G^\varphi$ и $K^\varphi\in\tau(G^\varphi)$. Таким образом, $S\in\tau^*(G)$. Значит, τ^* является транзитивным подгрупповым Y-функтором.

Докажем, что $(\tau^*)^*=\tau^*$. Обозначим $\theta=\tau^*$. Пусть $H\in\theta^*(G)$. Если $H=G$, то $H\in\tau^*(G)$. Предположим, что $H\neq G$. Для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi\neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная подгр $K^\varphi\in\theta(G^\varphi)$, содержащая H^φ. Так как $K^\varphi\neq G^\varphi$, то $K^\varphi\subseteq K_1^\varphi\in\tau(G^\varphi)$ и $K_1^\varphi\neq G^\varphi$. Значит, $H\in\tau^*(G)$. Итак, $\theta^*(G)\subseteq\tau^*(G)$. По утверждению 3) леммы 2 $\tau^*(G)\subseteq\theta^*(G)$. Следовательно, $\theta^*(G)=\tau^*(G)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если τ - разрешимый регулярный подгрупповой функтор, то τ^* является разрешимым нормализаторным транзитивным регулярным подгрупповым функтором.*

Доказательство. Для разрешимого регулярного подгруппового функтора т из леммы 4 следует, что τ^* является разрешимым транзитивным регулярным подгрупповым функтором.

Установим, что τ^* - нормализаторный подгрупповой функтор. Пусть G - разрешимая группа наименьшего порядка, в которой имеется подгруппа Я, не обладающая τ^*-нормализатором в G. Ясно, что H не X_τ-нормальна в G.

Пусть N - минимальная нормальная подгруппа группы G. По выбору G фактор-группа HN/N обладает τ^*-нормализатором $N^{\tau^*}_{G/N}(HN/N)$ в G/N. Обозначим $L/N=N^{\tau^*}_{G/N}(HN/N)$.

Предположим, что $L\neq G$. Можно считать, что $L/N\notin\tau^*(G/N)$. Это означает, что существует эпиморфизм φ группы G/N такой, что $(L/N)^\varphi\neq(G/N)^\varphi$ и $(G/N)^\varphi$ не имеет собственных подгрупп, которые содержат $(L/N)^\varphi$ и принадлежат $\tau((G/N)^\varphi)$. Пусть $\mathrm{Ker}\varphi=T/N$. Тогда $L/N\cdot T/N/T/N\neq G/N/T/N$. Отсюда $LT\neq G$. По выбору G в LT существует τ^*-нормализатор $N^{\tau^*}_{LT}(H)$ подгруппы H. Возьмем любую подгруппу K группы G, для которой $H\in\tau^*(K)$. По лемме 3 $HN/N\in\tau^*(KN/N)$. Тогда из $L/N=N^{\tau^*}_{G/N}(HN/N)$ следует, что $KN/N\subseteq L/N$. Поэтому $K\subseteq L\subseteq LT$. Отсюда и из $H\in\tau^*(K)$ получаем $K\subseteq N^{\tau^*}_{LT}(H)$. Значит, $N^{\tau^*}_{LT}(H)$ является τ^*-нормализатором подгруппы H в G. Противоречие с выбором G.

Допустим, что $L=G$, т. е. $HN/N\in\tau^*(G/N)$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G. Рассмотрим два случая.

1. Найдется минимальная нормальная подгруппа R группы G, для которой $HR/R\neq G/R$. Пусть ψ - эпиморфизм группы G такой, что $H^{\psi}\neq G^{\psi}$, и пусть $\operatorname{Ker}\psi=D$. Тогда $HD/D\neq G/D$. Выберем в D минимальную нормальную подгруппу N_1 группы G. Ясно, что $HN_1/N_1\neq G/N_1$. Так как $HN_1/N_1\in\tau^*(G/N_1)$ и τ^* регулярный подгрупповой функтор, то $HN_1/N_1\cdot D/N_1/D/N_1\in\tau^*(G/N_1/D/N_1)$. Откуда $HD/D\in\tau^*(G/D)$. Это означает, что в G/D найдется собственная подгруппа, которая содержит HD/D и которая принадлежит $\tau(G/D)$. Тем самым показано, что $H\in\tau^*(G)$, т. е. $G=N_G^{\tau^*}(H)$. Противоречие с выбором G.

2. Для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G фактор-группа $HN/N=G/N$. Так как $H\neq G$, то H содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G и $G=MN$.

Если ядро M_G подгруппы M в G не равно 1, то в M можно взять минимальную нормальную подгруппу M_1 группы G. Тогда $G=HM_1\subseteq M$. Противоречие.

Пусть $M_G=1$. Так как G - разрешимая группа, то $M\cap N=1$. Поэтому $M=H$. Отсюда и из $H\notin\tau^*(G)$ следует, что H является своим τ^*-нормализатором в G. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть τ - разрешимый регулярный подгрупповой функтор, N - нормальная подгруппа разрешимой группы G и H - подгруппа из G. Тогда* $N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)=N_G^{\tau^*}(H)N/N$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Обозначим $B=N_G^{\tau^*}(H)$ и $L/N=N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N)$, эти подгруппы существуют согласно теореме 1. Так как $H\in\tau^*(B)$, то по утверждению 1 леммы $HN/N\in\tau^*(BN/N)$. Поэтому $BN/N\subseteq L/N$.

Если $L/N\neq G/N$, то по индукции $N_{L/N}^{\tau^*}(HN/N)=N_L^{\tau^*}(H)N/N$. Так как $HN/N\in\tau^*(L/N)$, то фактор-группа $L/N\subseteq N_{L/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Поэтому $L/N=N_{L/N}^{\tau^*}(HN/N)$

Из $H\in\tau^*(N_L^{\tau^*}(H))$ следует, что $N_L^{\tau^*}(H)\subseteq B$. Но тогда $L/N=N_L^{\tau^*}(H)N/N\subseteq BN/N$, откуда $L/N=BN/N$.

Пусть $L=G$. Тогда $HN/N\in\tau^*(G/N)$.

Если $H\in\tau^*(G)$, то $B=G$ и $L/N=BN/N$.

Предположим, что $H\notin\tau^*(G)$. Тогда $H\neq G$ и найдется эпиморфизм ψ группы G такой, что $H^{\psi}\neq G^{\psi}$ и H^{ψ} не содержится ни в одной собственной подгруппе группы G^{ψ}, принадлежащей $\tau(G^{\psi})$. Обозначим $\operatorname{Ker}\psi=M$. Получаем, что $HM/M\neq G/M$ и в G/M нет собственных подгрупп, которые содержат HM/M и принадлежат $\tau(G/M)$.

Так как $HN/N\in\tau^*(G/N)$ и τ^* - регулярный функтор, то $HN/N\cdot MN/N/MN/N\in\tau^*(G/N/MN/N)$. Если $HNM\neq G$, то в $G/N/MN/N$ найдется собственная подгруппа $K/N/MN/N$ такая, что $HN/N\cdot MN/N/MN/N\subseteq K/N/MN/N\in\tau(G/N/MN/N)$. Из регулярности τ получаем, что $K\in\tau(G)$, а значит, $K/M\in\tau(G/M)$. Таким образом, $HM/M\subseteq K/M\neq G/M$. Противоречие с выбором эпиморфизма ψ.

Значит, $HNM=G$. Обозначим $R=HM$. Из $HN/N\in\tau^*(G/N)$ и $RN/N=G/N$ следует, что $RN/N=N_{RN/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Рассмотрим изоморфизм α такой, что $(R/R\cap N)^{\alpha}=RN/N$. Тогда верно равенство $(H(R\cap N)/R\cap N)^{\alpha}=HN/N$. Так как $R\neq G$, то по индукции имеем $N_{R/R\cap N}^{\tau^*}(H(R\cap N)/R\cap N)=N_R^{\tau^*}(H)(R\cap N)/R\cap N$. Обозначим τ^*-нормализатор $N_R^{\tau^*}(H)=R_1$, тогда выполняется равенство $(R_1(R\cap N)/R\cap N)^{\alpha}=R_1N/N$. По лемме 1 получаем, что $N_{RN/N}^{\tau^*}(HN/N)=R_1N/N$. Откуда $RN/N=R_1N/N$. Из

$H\in\tau^*(R_1)$ следует, что $R_1\subseteq B$. Но тогда $G/N=RN/N=R_1N/N\subseteq BN/N$, т. е. $L/N=BN/N$. Теорема доказана.

Рассмотрим одно из приложений введенных нормализаторных подгрупповых функторов для построения классов Шунка.

Определение 3. Пусть X - непустой класс групп, содержащийся в классе $\boldsymbol{Y}$, и τ - подгрупповой $\boldsymbol{Y}$-функтор. Введем класс групп $\boldsymbol{X}^{\tau}=(G\in \boldsymbol{Y}|H\in\tau(G)$ для любого $\boldsymbol{X}$-проектора H группы $\boldsymbol{G})$.

Теорема 3. *Если $\boldsymbol{X}$ - класс Шунка, состоящий из разрешимых групп, τ -разрешимый регулярный подгрупповой функтор, то $\boldsymbol{X}^{\tau^*}$ - класс Шунка.*

Доказательство. Из утверждения 1 леммы 3 следует, что класс $\boldsymbol{X}^{\tau^*}$ замкнут относительно гомоморфных образов.

Пусть G - разрешимая группа и $G/M_G\in \boldsymbol{X}^{\tau^*}$ для любой максимальной подгруппы M из G.

По теореме 1 для любого $\boldsymbol{X}$-проектора H группы G существует τ^*-нормализатор $N_G^{\tau^*}(H)$. Обозначим $R=N_G^{\tau^*}(H)$.

Ясно, что $R\in \boldsymbol{X}^{\tau^*}$. Пусть $R\subseteq L\subseteq G$ и $L\in \boldsymbol{X}^{\tau^*}$. Так как $H\subseteq L$, то H является $\boldsymbol{X}$-проектором подгруппы L. Поэтому $H\in\tau^*(L)$. По определению τ^*-нормализатора $L\subseteq R$. Значит, $R=L$. Таким образом, R - максимальная $\boldsymbol{X}^{\tau^*}$-подгруппа группы G.

Для произвольной нормальной подгруппы N группы G по теореме 2 $N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N) = RN/N$. Отсюда и по доказанному выше следует, что RN/N - максимальная $\boldsymbol{X}^{\tau^*}$-подгруппа группы G/N.

Значит, R является $\boldsymbol{X}^{\tau^*}$-проектором группы G. Тогда $RM_G=G$ для любой максимальной подгруппы M из G. Отсюда следует, что $G=R\in \boldsymbol{X}^{\tau^*}$. Таким образом, $\boldsymbol{X}^{\tau^*}$ - класс Шунка. Теорема доказана.

1. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн., 2003.
2. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
3. Васильев А.Ф., Каморников С.Ф. // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 30.
4. Мапп *A.* // Israel J. Math. 1973. Vol. 16. № 4. P. 446.
5. Carter R. W. // Proc. London Math. Soc. 1962. Vol. 3. № 12. P. 535.

Поступила в редакцию 03.03.05.

Александр Федорович Васильев - кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины.

Татьяна Ивановна Васильева - кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой высшей математики БелГУТа.

$L=\lambda V$

λ