УДК 512.55

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХАЛГЕБР ЛИ

А.Ф. Васильев, А.В. Сыроквашин

Подалгеброй Фраттини конечномерной алгебры Ли называется пересечение всех ее максимальных подалгебр. В работе исследуются пересечения различных семейств максимальных подалгебр разрешимых конечномерных алгебр Ли, не содержащих нильрадикал. Доказано, что в разрешимой конечномерной алгебре Ли подалгебра Фраттини совпадает с пересечением всех ее максимальных подалгебр данного вида.
Ключевые слова: *конечномерная алгебра Ли, максимальная подалгебра, идеал, подалгебра Фраттини, нильрадикал, m-функтор.*

Введение

В 1885 году Фраттини в [8] впервые исследовал подгруппу, равную пересечению всех максимальных подгрупп конечной группы, называемую сейчас подгруппой Фраттини. В 1953 году Гашюц [9] изучил свойства пересечения ненормальных максимальных подгрупп. Различные типы пересечений максимальных подгрупп конечных групп исследовали многие авторы: Дескинс, Бейдлеман, Л.И. Шидов, В.И.Ведерников и Н.Г.Дука и др. Следующий этап в развитии данного направления связан с возникновением теории формаций и введением понятия F-абнормальной максимальной подгруппы. Теория пересечений подгрупп данного вида в классе конечных разрешимых групп была построена В.В. Шлыком в [1], а для произвольных конечных групп Л.А.Шеметковым [2] и М.В.Селькиным (см. [3, с. 89-100]). Новый этап развития теории пересечений максимальных подгрупп связан с развитием теории подгрупповых функторов, полученные здесь результаты отражены в монографиях М.В. Селькина [3] и С.Ф.Каморникова и М.В. Селькина [4].

Развитие теории пересечений максимальных подалгебр конечномерных алгебр Ли берет старт с работ Маршала [10], Барнса [11], Тауэрса [12] и в настоящее время еще существенно отстает от соответствующей теории для конечных групп. Многие теоретико-групповые результаты хотя и имеют аналоги в алгебрах Ли (особенно в теории разрешимых конечномерных алгебр Ли), однако во многих случаях не могут быть прямо перенесены.

Основная цель настоящей настоящей работы – получить для разрешимых конечномерных алгебр Ли аналоги результатов В.С.Монахова [5-6] о пересечениях максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.

1 Предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечномерные алгебры Ли над полем **P**. Обозначения и терминалогия соответствуют [7].

Определение 1.1. *Подалгебра* M *называется максимальной подалгеброй алгебры Ли* L, *если* $M \neq L$ *и из строгого включения* $M \subset P$, *где* P *– подалгебра из* L, *следует, что* $P = L$.

Определение 1.2. *Пусть* $\{M_\alpha, \alpha \in I\}$ *– (возможно пустое) множество максимальных подалгебр в* L. *Подалгебра Фраттини* $\Phi(L)$ *определяется, как сама* L, *если* I *пусто, и как пересечение* $\Phi(L) = \cap_{\alpha\in I} M_\alpha$ *в противном случае.*

Если M – подалгебра из алгебры Ли L, то M_L обозначает максимальный идеал алгебры Ли L, содержащийся в M. Цоколь алгебры Ли L, т.е. сумма всех ее минимальных идеалов, обозначается так: $Soc(L)$. Через $N(L)$ будем обозначать нильрадикал алгебры Ли L.

Теорема 1.3. (Тауэрс, [12]) *Пусть* L *– конечномерная алгебра Ли,* $\Phi(L) = \Phi$, $\varphi(L) = \varphi$, $N(L) = N$. *Тогда* $\varphi(L/\varphi) = \{0\}$, *а также*

1) $\Phi \cap N = \varphi \supseteq N^2$;

2) $N(L/\varphi) = N/\varphi = Soc(L/\varphi)$;

3) *Идеал* N/φ *дополняем в* L/φ, *т. е. для некоторой подалгебры* M/φ *из* L/φ *справедливо* $L/\varphi = N/\varphi \oplus M/\varphi$.

Лемма 1.4. *Пусть* L *– алгебра Ли над полем* **P**. *Тогда*

1) если M *– подалгебра в* L *такая, что* $L = M + A$, *где* A *– абелев минимальный идеал в* L, *то* M *является максимальной подалгеброй в* L *и* $L = M \oplus A$;

2) *если* M *– максимальная подалгебра из алгебры Ли* L *и* A *– абелев минимальный идеал в* L*, не содержащийся в* M*, то* $L = M \oplus A$.

Доказательство. Докажем сначала 1). Пусть P – максимальная подалгебра в L, содержащая M. Тогда из тождества Дедекинда $P = M + P \cap A$. Из абелевости идеала A имеем, что $P \cap A$ – идеал в L. Из минимальности идеала A следует $P \cap A = \{0\}$. Тогда $P = M$ и $M \cap A = \{0\}$. Утверждение 2) следует из 1). Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть* L *– разрешимая алгебра Ли над полем* **P** *и* M *– максимальная подалгебра из* L *такая, что* $L = M + A$*, где* A *– минимальный идеал в* L*. Пусть* $Soc(L) \neq A$*. Тогда* $M_L \neq \{0\}$.

Доказательство. Из 2) леммы 1.4 следует, что $L = M \oplus A$. Заметим, что $Soc(L) \cap M \neq \{0\}$. Из разрешимости алгебры Ли L следует, что идеал $Soc(L)$ абелев. Отсюда и из $L = Soc(L) + M$ следует, что $Soc(L) \cap M$ – идеал в L. Тогда $M_L \neq \{0\}$. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Пусть* L *– разрешимая алгебра Ли над полем* **P**, *и* M *– максимальная подалгебра в* L *такая, что* $M_L = \{0\}$*. Тогда* L *имеет единственный минимальный идеал* N*, причем* $L = M \oplus N$ *и* $C_L(N) = N$.

Доказательство. Если $dim(L) = 1$, то $C_L(N) = N = L$ и лемма верна. Пусть теперь $dim(L) > 1$. Пусть M – максимальная подалгебра в L такая, что $M_L = \{0\}$. Из разрешимости L следует, что в ней найдется абелев минимальный идеал N. Ввиду 2) леммы 1.4 получаем, что $L = M \oplus N$. Так как $M_L = \{0\}$, то из леммы 1.5 следует, что N – единственный минимальный идеал в L.

Докажем теперь, что $C_L(N) = N$. Включение $C_L(N) \supseteq N$ следует из абелевости идеала N. Допустим, что $C_L(N) \supset N$. Тогда $C_L(N) \cap M \neq \{0\}$. Пусть $0 \neq y \in C_L(N) \cap M$ и $z \in L$. Тогда $z = m + n$, где $m \in M$, $n \in N$. Далее $zy = my \in C_L(N) \cap M$. Следовательно, $C_L(N) \cap M$ – идеал в L и $C_L(N) \cap M \subseteq M_L = \{0\}$. Получили противоречие с $C_L(N) \supset N$. Лемма доказана.

Лемма 1.7. *Пусть* L *– разрешимая алгебра Ли над полем* **P** *и* M *– подалгебра в* L *такая, что* $L = Soc(L) \oplus M$*. Тогда* $C_L(Soc(L)) = Soc(L)$.

Доказательство. Так как идеал $Soc(L)$ абелев, то $Soc(L) \subseteq C_L(Soc(L))$. Предположим, что $C_L(Soc(L)) \neq Soc(L)$. Выберем произвольный элемент $x \in C_L(Soc(L)) \setminus Soc(L)$. Тогда $x = n + m$, где $n \in Soc(L)$, $m \in M$. Далее $xa = na + ma = ma$ для всякого элемента $a \in Soc(L)$. Из $xa = 0$ следует, что $ma = 0$. Тогда $m \in C_L(Soc(L)) \cap M$. Из $L = Soc(L) \oplus M$ следует, что $C_L(Soc(L)) \cap M \subseteq M_L = \{0\}$. Тогда $m = 0$ и $x = n \in Soc(L)$. Получили противоречие с выбором x. Тогда $C_L(Soc(L)) = Soc(L)$. Лемма доказана.

Лемма 1.8. *Пусть* L *– алгебра Ли над полем* **P** *и* N *– абелев идеал в* L*. Тогда для любого элемента* $n \in N$ *эндоморфизм* $1 + adn$ *пространства* L *является автоморфизмом алгебры Ли* L.

Доказательство. Выберем произвольные элементы $x, y \in L$, $n \in N$. Из абелевости идеала N следует, что

$$(x(1 + adn))(y(1 + adn)) = (x + xn)(y + yn) = xy + (xn)y + x(yn).$$

Из тождества Якоби имеем $x(yn) = -n(xy) - y(nx) = -n(xy) - (xn)y$. Откуда

$$(x + xn)(y + yn) = xy - n(xy) = xy + (xy)n = (xy)(a + adn).$$

Выберем произвольные элементы x, y, z из образа алгебры Ли L при отображении $1 + adn$. Пусть a, b, c – произвольные элементы из L, такие что $a(1 + adn) = x$, $b(1 + adn) = y$, $c(1 + adn) = z$. Тогда $(xy)z + (yz)x + (zx)y$ есть образ элемента $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$. Поэтому $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$. Заметим, что отображение $1 + adn$ взаимно однозначно (обратное к нему $1 - adn$). Поэтому $1 + adn$ – автоморфизм алгебры Ли L. Лемма доказана.

2 Обобщенная подалгебра Фраттини

Определение 2.1. *Назовем* m*-функтором на классе алгебр Ли над полем* **P** *отображение* θ, *которое ставит в соответствие каждой алгебре Ли L некоторое подмножество ее максимальных подалгебр и саму алгебру Ли L.*

Данное подмножество обозначим через $\theta(L)$. Из определения $L \in \theta(L)$.

Определение 2.2. *Пусть θ – m-функтор на классе алгебр Ли над полем* **P**. *Назовем θ-подалгеброй Фраттини алгебры Ли L подалгебру $\Phi_\theta(L) = \cap M$, где $M \in \theta(L)$.*

В случае, когда $\theta(L)$ содержит все максимальные подалгебры алгебры Ли L, то $\Phi_\theta(L) = \Phi(L)$.

Определение 2.3. *Назовем m-функтор θ* регулярным, если:

1) для любой алгебры Ли L и идеала N в L из $M \in \theta(L)$ следует, что $M + N / N \in \theta(L/N)$;

2) для любой алгебры Ли L и идеала N в L из $M / N \in \theta(L/N)$ следует, что $M \in \theta(L)$.

Теорема 2.4. *Пусть θ – регулярный m-функтор, заданный на классе всех алгебр Ли над полем* **P**. *Тогда $\Phi_\theta(L)$ – идеал для любой разрешимой алгебры Ли L.*

Доказательство. Индукцией по $dim(L)$. Если $dim(L) = 1$, то $\Phi_\theta(L) = \{0\}$.

Пусть теперь $dim(L) > 1$ и $\theta(L) = \{L, \quad M_i, i \in I\}$. Предположим, что $M_{iL} \neq \{0\}$ для всех $i \in I$. Пусть N_i – некоторый минимальный идеал алгебры Ли L такой, что $N_i \subseteq M_{iL}, i \in I$. Обозначим через $\Phi_{\theta, N_i}(L)$ пересечение всех элементов из $\theta(L)$, которые содержат в себе N_i. Из регулярности m-функтора θ имеем, что $\Phi_\theta(L/N_i) = \Phi_{\theta,N_i}(L)/N_i$. По индукции для алгебры Ли L/N_i следует, что $\Phi_{\theta,N_i}(L)/N_i$ – идеал в L/N_i. Откуда $\Phi_{\theta,N_i}(L)$ – идеал в L. Тогда подалгебра $\Phi_\theta(L) = \cap_{i\in I} \Phi_{\theta,N_i}(L)$ – идеал в L.

Предположим теперь, что $M_{iL} = \{0\}$ для некоторого $i \in I$. Обозначим соответствующую подалгебру $M_i = M$. По лемме 1.6 алгебра Ли L имеет единственный минимальный идеал N, причем $C_L(N) = N$ и $L = M \oplus N$. Покажем, что в этом случае $\Phi_\theta(L) = \{0\}$. Допустим, найдется элемент $x \in \Phi_\theta(L)$, $x \neq 0$. Из $x \in \Phi_\theta(L) \subseteq M$, $M \cap N = \{0\}$ и $C_L(N) = N$, следует, что найдется элемент $n \in N$, $n \neq 0$, такой что $xn \neq 0$. Так как идеал N абелев, то по лемме 1.8 отображение $1 + adn$ – автоморфизм алгебры Ли L. Пусть $y = x(1 + adn) = x + xn$. Из регулярности θ имеем $(\Phi_\theta(L))(1 + adn) = \Phi_\theta(L)$. Откуда $y = x + xn \in \Phi_\theta(L) \subseteq M$. Для любого $h \in N$ имеем $yh = xh + (xn)h = xh$. Тогда $(y - x)h = 0$ и $(y - x) \in C_L(N) \cap M = \{0\}$. Откуда $y = x$. Тогда $xn = 0$, что противоречит выбору элемента n. Откуда $\Phi_\theta(L) = \{0\}$. Теорема доказана.

Пусть L – алгебра Ли над полем **P** и H – абелев идеал в L. Если M – подалгебра в L и $h \in H$, то обозначим подалгебры $M_h = M(1 + adh)$ и $\Phi_{H,M}(L) = \cap M_h$, где $h \in H$.

Лемма 2.5. *Пусть L – алгебра Ли над полем* **P** *и M – максимальная подалгебра в L. Пусть H – абелев минимальный идеал из L, не содержащийся в M. Тогда $M_h \cap H = \{0\}$ для любого $h \in H$ и $\Phi_{H,M}(L) \subseteq C_L(H)$.*

Доказательство. По 2) леммы 1.4 следует, что $M \cap H = \{0\}$. Пусть $h \in H$, $h \neq 0$. Из леммы 1.8 следует, что $1 + adh$ – автоморфизм алгебры Ли L. Поэтому подалгебра $M_h = M(1 + adh)$ является максимальной в L. Рассмотрим $M_h \cap H$. Предположим, что $M_h \cap H \neq \{0\}$. Выберем $x \in M_h \cap H$, $x \neq 0$. Тогда найдется $y \in M$ такой, что $y(1 + adh) = x$ и $y \neq 0$. Откуда $y = x - yh \in H \cap M = \{0\}$. Тогда $y = 0$. Откуда $x = 0$. Получили противоречие.

Пусть $x \in \Phi_{H,M}(L)$ и $h \in H$. Тогда $x \in M_h \cap M$. Откуда $x(1 + adh) \in M_h$ и $xh \in H \cap M_h$. Так как $H \cap M_h = \{0\}$, то $xh = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть L – ненильпотентная разрешимая алгебра Ли над полем* **P**. *Тогда в L найдется максимальная подалгебра M, не являющаяся в ней идеалом и такая что $M + N(L) = L$.*

Доказательство. Пусть L – алгебра Ли наименьшей размерности, для которой теорема неверна.

Если $\Phi(L) \neq \{0\}$, то в $L/\Phi(L)$ найдется максимальная подалгебра $M/\Phi(L)$, не являющаяся в ней идеалом и такая, что $M/\Phi(L)+N(L/\Phi(L))=L/\Phi(L)$. Из 2) теоремы 1.3 следует, что $N(L/\Phi(L))=N(L)/\Phi(L)$. Откуда $M/\Phi(L)+N(L)/\Phi(L)=L/\Phi(L)$. Поэтому $M+N(L)=L$ и подалгебра M – искомая. Получили противоречие.

Пусть $\Phi(L)=\{0\}$. Тогда из 3) теоремы 1.3 следует, что в L найдется подалгебра M такая, что $L=N(L)\oplus M$, причем $N(L)=Soc(L)$. Из разрешимости L следует, что $M_L=\{0\}$. Так как $Soc(L)=A_1\oplus\ldots\oplus A_s$ – сумма минимальных идеалов из L, то найдется число k такое, что $1\leq k\leq s$ и $MA_k\neq\{0\}$. В противном случае $M_L=M$. Подалгебра $M\oplus A_1\oplus\ldots\oplus A_{k-1}\oplus A_{k+1}\oplus\ldots\oplus A_s$ – искомая. Лемма доказана.

Определение 2.7. *Назовем m-функтор θ m-функтором Фраттини-Гашюца на классе всех алгебр Ли над полем* **P**, *если для любой ненильпотентной алгебры Ли L множество $\theta(L)$ содержит все максимальные подалгебры из L, не являющиеся в ней идеалами.*

Лемма 2.8. Пусть θ *– регулярный m-функтор Фраттини-Гашюца на классе всех разрешимых алгебр Ли над полем* **P**. *Если M и N – идеалы разрешимой алгебры Ли L такие, что $N\subseteq\Phi_\theta(L)$ и M/N – нильпотентная алгебра Ли, то M – нильпотентная алгебра Ли. В частности, $\Phi_\theta(L)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть m-функтор τ такой, что для каждой разрешимой алгебры Ли L множество $\tau(L)$ содержит все максимальные подалгебры из L, не являющиеся в ней идеалами, а также саму L, и только их. Ясно, что $\Phi_\theta(L)\subseteq\Phi_\tau(L)$ для любого регулярного m-функтора Фраттини-Гашюца θ на классе всех разрешимых алгебр Ли над полем **P**. Так как $N(L)\subseteq\Phi_\tau\cap M$, то $M/\Phi_\tau\cap M$ нильпотентна. Применяя следствие 2.8 и лемму 2.3 из [13] получаем нильпотентность M. Лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 2.9. *Пусть θ – регулярный m-функтор Фраттини-Гашюца на классе всех разрешимых алгебр Ли над полем* **P**. *Тогда $\Phi_\theta(L)$ совпадает с пересечением всех максимальных подалгебр M разрешимой алгебры Ли L таких, что $M\in\theta(L)$ и $M+N(L)=L$.*

Доказательство. Если алгебра Ли L нильпотентна, то $N(L)=L$ и утверждение теоремы выполняется. Пусть L не нильпотентна. Обозначим через $\Phi_\eta(L)$ пересечение всех максимальных подалгебр M алгебры Ли L таких, что $M\in\theta(L)$ и $M+N(L)=L$. Ясно, что $\Phi_\theta(L)\subseteq\Phi_\eta(L)$. Предположим, что обратное включение неверно и выберем алгебру Ли L наименьшей размерности, для которой $\Phi_\eta(L)\not\subset\Phi_\theta(L)$.

Предположим, что $\Phi_\theta(L)\neq\{0\}$. В силу леммы 2.8 из ненильпотентности L следует, что $\Phi_\theta(L)\neq L$. Из регулярности функтора θ и теоремы 2.4 следует, что $\Phi_\theta(L)$ – идеал в L и $\Phi_\theta(L/\Phi_\theta(L))=\Phi_\theta(L)/\Phi_\theta(L)=\{0\}$. Ввиду выбора алгебры Ли L получаем, что $\Phi_\eta(L/\Phi_\theta(L))=\Phi_\theta(L/\Phi_\theta(L))=\{0\}$.

Из леммы 2.8 имеем $\Phi_\theta(L)\subseteq N(L)$. Тогда $N(L)/\Phi_\theta(L)\subseteq N(L/\Phi_\theta(L))$. Пусть $H/\Phi_\theta(L)=N(L/\Phi_\theta(L))$. Из леммы 2.8 следует, что $H\subseteq N(L)$ и $H/\Phi_\theta(L)\subseteq N(L)/\Phi_\theta(L)$. Откуда $N(L)/\Phi_\theta(L)=N(L/\Phi_\theta(L))$.

Пусть $M/\Phi_\theta(L)$ – максимальная подалгебра в $L/\Phi_\theta(L)$ такая, что $M/\Phi_\theta(L)+N(L)/\Phi_\theta(L)=L/\Phi_\theta(L)$ и $M/\Phi_\theta(L)\in\theta(L/\Phi_\theta(L))$. Тогда $M+N(L)=L$ и $M\in\theta(L)$. Откуда $\Phi_\eta(L)/\Phi_\theta(L)\subseteq\Phi_\eta(L/\Phi_\theta(L))$. Теперь из $\Phi_\eta(L/\Phi_\theta(L))=\{0\}$ следует, что $\Phi_\eta(L)=\Phi_\theta(L)$. Получили противоречие с нашим предположением.

Пусть теперь $\Phi_\theta(L)=\{0\}$. Тогда $\Phi(L)=\{0\}$. Из 2) теоремы 1.3 имеем $N(L)=Soc(L)$. Так к алгебра Ли L имеет конечную размерность, то $N(L)=N_1\oplus\ldots\oplus N_k$, где N_i пробегает все минимальные идеалы алгебры Ли L. Из леммы 2.6 следует, что в L найдется максимальная подалгебра M, не являющаяся в L идеалом и такая, что $M+N(L)=L$. Так как θ – регулярный m-функтор Фраттини-Гашюца, то $M\in\theta(L)$. Кроме того, найдется число $i\le k$ такое, что идеал $H=N_i$ не содержится в M. Откуда по лемме 1.4 имеем $L=H\oplus M$. Из леммы 2.5 следует, что $M_h\cap H=\{0\}$ для любого элемента $h\in H$. Из регулярности θ имеем, что $M_h\in\theta(L)$ и $\Phi_\eta(L)\subseteq\Phi_{H,M}(L)$. Из леммы 2.5 следует, что $\Phi_\eta(L)\subseteq C_L(H)$. Далее для любого $j=1,\ldots,k$ найдется максимальная подалгебра $M\in\theta(L)$ такая, что N_j не содержится в M. В противном случае для некоторого $s\le k$ идеал $N_s\subseteq\Phi_\theta(L)$. Это противоречит тому, что $\Phi_\theta(L)=\{0\}$. Повторяя для каждого $j=1,\ldots,k$ рассуждения, аналогичные для случая $H=N_i$, получим, что $\Phi_\eta(L)\subseteq\cap_j C_L(N_j)\subseteq C_L(N_1\oplus\ldots\oplus N_k)$. Из 2) теоремы 1.3 и леммы 1.7 следует, что $\Phi_\eta(L)\subseteq N(L)$. Но тогда $\Phi_\eta(L)=\Phi_\theta(L)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.10. *Подалгебра Фраттини* $\Phi(L)$ *разрешимой алгебры Ли* L *над полем* **P** *совпадает с пересечением всех максимальных подалгебр* M *из* L *таких, что* $M+N(L)=L$.

Если функтор θ ставит в соответствие каждой алгебре Ли L множество $\theta(L)$ всех максимальных подалгебр, не являющихся в ней идеалами, а также саму L, и только их, то будем обозначать $\Phi_\theta(L)=\Delta(L)$.

Следствие 2.11. *Подалгебра* $\Delta(L)$ *разрешимой ненильпотентной алгебры Ли* L *над полем* **P** *совпадает с пересечением всех максимальных подалгебр* M *из* L *таких, что* M *не является идеалом в* L *и* $M+N(L)=L$.

Frattini subalgebra of a finite-dimensional Lie algebra is the intersection of all its maximal subalgebras. This paper investigates the intersections of maximal subalgebras different families that do not contain nilradical of solvable finite-dimensional Lie algebras. It has been proved that a solvable Lie algebra of a finite-dimensional Frattini subalgebra coincides with the intersection of all its maximal subalgebras of the same types.
The key words: *finite-dimensional Lie algebra, maximal subalgebra, ideal, Frattini subalgebra, nilradical, m-functor.*

Список литературы

1. Шлык В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1973. Т. 14. № 3. С. 429-439.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 278 с.
3. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Бел. Навука, 1997. 144 с.
4. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Бел. Навука, 2003. 254 с.
5. Монахов В.С. Замечание о максимальных подгруппах конечных групп // Доклады НАН Беларуси. 2003. Т. 47, №4, С. 31-33.
6. Монахов В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2004. – № 6 (27). С. 81.
7. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. Москва: Наука, 1985. 448 с.
8. Frattini G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni // Atti Acad. dei Lincei. 1885. V. 1. P. 281-285.
9. Gaschütz W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160-170.
10. Marshall E. The Frattini subalgebra of a Li algebra // J. Lond. Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.
11. Barnes D.W. The Frattini argument for Li algebras // Math. Z. 1973. Bd. 133. P. 277-283.
12. Towers D. Frattini theory for algebras. // Proc. London Math.Soc. 1973, V.27. P.440-462.
13. Towers D. On maximal subalgebras of Lie algebras containing Engel subalgebras // J. Pure Appl. Algebra. 2011. Available online 26 September 2011.

Об авторах

Сыроквашин А.В. – филиал Брянского государственного университета имени академика

И.Г. Петровского в г. Новозыбкове, ассистент, syrokvashin87@gmail.com

Васильев А.Ф. – доктор физико-математических наук, профессор Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, formation56@mail.ru