Тогда группа Γ удовлетворяет альтернативе Титса.

Для пары чисел $1 \leqslant i < j \leqslant n$ рассмотрим группу

$$G_{ij} = \langle x_i, x_j \mid x_i^{q_i} = x_j^{q_j} = w_{ij}(x_i, x_j)^{q_{ij}} = 1 \rangle,$$

которую называют вершинной группой. Существует естественной гомоморфизм $G_{ij} \to \Gamma$, однако этот гомоморфизм не всегда является инъективным. Поэтому если G_{ij} содержит неабелеву свободную подгруппу, мы не можем утверждать, что Γ содержит такую подгруппу. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что для группы Γ существует вершинная группа G_{ij} обладающая свойством: существует гомоморфизм $\rho : G_{ij} \to PSL_2(\mathbb{C})$ такой, что элементы $\rho(x_i), \rho(x_j), \rho(w_{ij})$ имеют порядки q_i, q_j, q_{ij} соответственно (такой гомоморфизм называется специальным) и группа $\rho(G_{ij})$ содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда существует гомоморфизм $\bar{\rho} : \Gamma \to SO_{n+1}(\mathbb{C})$ такой, что $\bar{\rho}(\Gamma)$ (а следовательно и Γ) содержит неабелеву свободную подгруппу. Таким образом, Γ удовлетворяет альтернативе Титса.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винберг Э. Б. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 9. С. 3–12.

2. Williams G. The Tits alternative for groups defined by periodic pared relations // Communications in Algebra. 2006. V. 34. P. 251–258.

УДК 512.542

Об инъекторах конечных разрешимых произведений групп[1]

А. Ф. Васильев (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: formation56@mail.ru

On injectors of finite soluble products of groups

A. F. Vasil'ev (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: formation56@mail.ru

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Необходимые обозначения, определения и результаты можно найти в [1], [2]. Замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп класс групп $\mathfrak{X}$ называется классом Фиттинга, если в каждой группе имеется единственная максимальная нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа $G_{\mathfrak{X}}$, называемая $\mathfrak{X}$-радикалом группы G. Если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором группы G, если $H \cap N$ — максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа в N для каждой субнормальной подгруппы N из G. По теореме Гашюца–Фишера –Хартли в любой группе G имеется единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Пусть $G = AB$ — произведение своих подгрупп A и B. Подгруппа F группы G называется префакторизуемой относительно $G = AB$, если $F = (A \cap F)(B \cap F)$. Префакторизуемая подгруппа F называется факторизуемой, если дополнительно выполняется $A \cap B \subseteq F$.

В [3] Локетт в классе разрешимых групп установил классы Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых в каждой группе $G = MN$ с нормальными подгруппами M и N любой $\mathfrak{F}$-инъектор является префакторизуемым. В [4] Амберг и Хефлинг рассматривали классы Фиттинга, для которых в группах $G = AB$ с нильпотентными подгруппами A и B существуют префакторизуемые (факторизуемые) $\mathfrak{F}$-инъекторы. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. В дальнейшем для краткости всякую группу $G = AB$ будем называть ди-$\mathfrak{F}$-группой, если A и B принадлежат $\mathfrak{F}$.

Задача 1. *Конструктивно описать классы (формации) Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых справедливо утверждение: если $G = AB$ — ди-$\mathfrak{F}$-группа и I — ее $\mathfrak{F}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B, то I факторизуем относительно $G = AB$.*

В работе [5] нами данная проблема была решена в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп для случая, когда $\mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная формация Фиттинга. В настоящем сообщении мы продолжаем данные исследования и решаем проблему для случая, когда $\mathfrak{F}$ — формация Фишера. Прежде чем сформулировать основной результат, напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Фишера, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия подгрупп вида PN, где P — силовская p-подгруппа и N — нормальная подгруппа группы G. Формация $\mathfrak{F}$, одновременно являющаяся классом Фишера, называется формацией Фишера.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация Фишера. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Если $G = AB$ — ди-$\mathfrak{F}$-группа и I — ее $\mathfrak{F}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B, то I факторизуем в $G = AB$.*

(2) *Если $G = AB$ — ди-$\mathfrak{F}$-группа и I — ее $\mathfrak{F}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B, то $A \cap B \subseteq I$.*

(3) *Любая разрешимая $\mathfrak{F}$-критическая группа или является группой Шмидта, или имеет простой порядок.*

(4) *$\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией и имеет такое полное локальное задание f, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(p)}$ для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \oslash$ для остальных простых p.*

Следствие 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — формация всех π-нильпотентных групп, $G = AB$ — ди-π-нильпотентная группа. Если H — π-нильпотентный инъектор группы G, перестановочный с подгруппами A и B, то $A \cap B \subseteq H$, но $A \cap B$ не обязательно содержится в $G_{\mathfrak{F}}$.*

Обозначим через $\mathfrak{H}$ класс всех групп, у которых любая группа Шмидта сверхразрешима. Согласно [6] $\mathfrak{H}$ является наследственной формацией Фиттинга, а значит, формацией Фишера.

Следствие 2. *Пусть $G = AB$ — ди-$\mathfrak{H}$-группа, R — ее $\mathfrak{H}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B. Тогда $R = (A \cap R)(B \cap R)$ и $A \cap B \subseteq R$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amberg B., Franciosi S., Giovanni F. Products of Groups. — Oxford, 1992. 220 p.

2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

3. Lockett P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. — Ph.D. thesis, University of Warwick, 1971. 32 p.

4. Amberg B., B. Höfling B. On finite products of nilpotent groups // Arch. Math. 1994. Vol. 63. P. 1–8.

5. Васильев А. Ф. О факторизуемых инъекторах конечных разрешимых групп // Весн. Вiцебскага дзярж. ун-та. 2005. № 4 (38). С. 108–111.

6. Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Том 58, № 5. С. 717–722.

——

УДК 512.542

О конечных группах с заданными свойствами силовских нормализаторов[1]

Т. И. Васильева (Беларусь, г. Гомель)
Белорусский государственный университете транспорта
e-mail: tivasilyeva@mail.ru
А. Г. Коранчук (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: melchenkonastya@mail.ru

On finite groups with given properties of Sylow normalizers

T. I. Vasilyeva (Belarus, Gomel)
Belarusian State University of Transport
e-mail: tivasilyeva@mail.ru
A. G. Koranchuk (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: melchenkonastya@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Свойства нормализаторов силовских подгрупп (или силовских нормализаторов) группы связаны со строением всей группы. Например, примарность силовских нормализаторов группы G влечет примарность всей группы G [1]. В [2] было установлено, что если в группе G все силовские нормализаторы нильпотентны, то и G нильпотентна. В ряде работ (см., например, [3]–[6]) для насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ были рассмотрены группы с силовскими нормализаторами из $\mathfrak{F}$. Согласно [7], подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп от H до G с простыми индексами. В [8] была доказана сверхразрешимость группы с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими нормализаторами. В [9] исследовались группы с формационно субнормальными силовскими нормализаторами.

Полученные нами результаты относятся к отмеченному выше направлению исследования групп.

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь