



Подгрупповые функторы и композиционные формации конечных групп

1. Введение. Все рассматриваемые группы конечны и принадлежат некоторому универсальному классу групп $\mathfrak{M}$, который замкнут относительно взятия гомоморфизмов, подгрупп и расширений. В дальнейшем все классы групп являются подклассами класса $\mathfrak{M}$.

В монографиях [1–3] рассмотрен целый ряд конструкций классов групп.

Отметим две из них. Первая конструкция класса $\mathfrak{S}^{\mathfrak{X}}$ была предложена в работе [4] Картера, Фишера и Хоукса, и определяется следующим образом (см. [2, с. 516]). Для данного класса групп $\mathfrak{X}$ вводится операция замыкания $S_{\mathfrak{X}}$ на классах групп: $S_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y} = (S(G) \cap \mathfrak{X} \mid G \in \mathfrak{Y})$. Затем для каждого класса групп $\mathfrak{S}$ определяется класс групп $\mathfrak{S}^{\mathfrak{X}} = (G \in \mathfrak{M} \mid S(G) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S})$.

Истоки второй конструкции – класса $\mathfrak{H}\downarrow\mathfrak{X}$ находятся в работах Блессеноля [5] и Дерка [6]. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс Шунка и $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Следуя [2, с. 331], определим класс групп $\mathfrak{H}\downarrow\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{M} \mid \text{Proj}_{\mathfrak{H}}(G) \subseteq \mathfrak{X})$.

Наблюдающийся параллелизм в определениях классов $\mathfrak{S}^{\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{H}\downarrow\mathfrak{X}$, а также общность задач, рассматриваемых для этих классов, приводят к необходимости рассмотрения следующей универсальной конструкции.

Напомним [3], что отображение h , которое ставит в соответствие каждой группе $G \in \mathfrak{M}$ некоторую непустую систему $h(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым функтором, если $(h(G))^{\alpha} = h(G^{\alpha})$ для любого изоморфизма α группы G .

Пусть h – некоторый подгрупповой функтор. С помощью h для класса групп $\mathfrak{S}$ определим его h -степень $\mathfrak{S}^h = (G \in \mathfrak{M} \mid h(G) \subseteq \mathfrak{S})$.

Отметим, что идея конструкции класса $\mathfrak{S}^h$ не является новой. Данная конструкция впервые вводилась и изучалась в работе Н.Т. Воробьева [7] для случая, когда h – подгрупповой функтор Барнса–Кегеля [8]. Для другого типа подгрупповых функторов класс $\mathfrak{S}^h$ исследовался А.Н. Скибой в [9].

В связи с изучением класса групп $\mathfrak{S}^h$ рассматривается следующий основной вопрос: как свойства $\mathfrak{S}^h$ зависят от свойств $\mathfrak{S}$ и h ?

В настоящей работе дается ответ на этот вопрос для случая, когда $\mathfrak{S}$ – композиционная формация. Нами найдены условия, налагаемые на подгрупповой функтор h , при которых класс $\mathfrak{S}^h$ является композиционной формацией.

2. Предварительные сведения. В работе используются обозначения и определения из монографий [1–3]. Выделим некоторые обозначения, определения и результаты. $K(G)$ – совокупность всех композиционных факторов группы G (для единичной группы 1 полагаем $K(1) = \emptyset$). Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $K(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} K(G)$.

Напомним [1], что функция $f: \mathfrak{M} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется композиционным экраном, если выполняются следующие условия: 1) $f(1) = \mathfrak{M}$; 2) если $G_1 \simeq G_2$, то $f(G_1) = f(G_2)$; 3) $f(G) = \bigcap_{S \in K(G)} f(S)$ для любой $G \neq 1$. Главный фактор

H/K группы G называется f -центральным, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. Класс $CF(f)$, состоящий из всех групп, у которых все главные факторы f -центральны, называется композиционной формацией.

Композиционный экран f формации $\mathfrak{F} = CF(f)$ называется: 1) внутренним, если $f(S) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $S \in K(\mathfrak{M})$; 2) максимальным внутренним, если f является максимальным элементом множества всех внутренних композиционных экранов формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.1 [1]. Композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний композиционный экран f , причем f обладает следующими свойствами: 1) $f(p) = \mathfrak{A}_p f(p)$ для любого простого числа p ; 2) $f(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H .

Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\mathfrak{X}$ -проектор группы G есть подгруппа H такая, что HN/N $\mathfrak{X}$ -максимальна в G/N для любой $N \triangleleft G$. Нами будут использоваться следующие известные свойства $\mathfrak{X}$ -проекторов (см., например, [2]).

Лемма 2.2 [10]. Пусть $\mathfrak{X}$ – гомоморф, G – группа и $N \triangleleft G$. Тогда: 1) если H – $\mathfrak{X}$ -проектор в G , то HN/N – $\mathfrak{X}$ -проектор в G/N ; 2) если W/N – $\mathfrak{X}$ -проектор в G/N , то каждый $\mathfrak{X}$ -проектор из W есть $\mathfrak{X}$ -проектор группы G .

Теорема 2.3 [10]. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Шунка. Тогда всякая группа обладает $\mathfrak{X}$ -проектором.

3. Индуктивные подгрупповые функторы. Пусть h – некоторый подгрупповой функтор. Следуя [3], h будем называть эпиморфным функтором, если для каждого эпиморфизма $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ имеет место равенство $h(G^\varphi) = \{U^\varphi \mid U \in h(G)\}$.

Определение 3.1. Эпиморфный подгрупповой функтор h назовем индуктивным, если выполняются следующие условия: 1) если $H/N \in h(G/N)$, то $h(H) \subseteq h(G)$; 2) если $H \in h(G)$, то $H \in h(H)$.

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенный гомоморф. Тогда $S_{\mathfrak{X}}$, где $S_{\mathfrak{X}}(G) = \{S(G) \cap \mathfrak{X}\}$, является индуктивным подгрупповым функтором.

Доказательство. Пусть φ – эпиморфизм группы G и $N = \text{Ker } \varphi$. Если H – $\mathfrak{X}$ -подгруппа группы G , то $HN/N \in Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Следовательно, $\{H^\varphi \mid H \in S_{\mathfrak{X}}(G)\} \subseteq S_{\mathfrak{X}}(G^\varphi)$. Докажем обратное включение. Пусть $R/N \in S_{\mathfrak{X}}(G/N)$. Для минимального добавления H к подгруппе N в R по лемме 11.1 из [1] имеет место включение $H \cap N \subseteq \Phi(H)$. Из $R/N = HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{X}$ и насыщенности $\mathfrak{X}$ следует $H \in \mathfrak{X}$, а значит, $H \in S_{\mathfrak{X}}(G)$. Отсюда получаем, что $S_{\mathfrak{X}}(G^\varphi) \subseteq \{H^\varphi \mid H \in S_{\mathfrak{X}}(G)\}$. Мы доказали, что $S_{\mathfrak{X}}$ – эпиморфный функтор. Заметим, если R – подгруппа G , то $S_{\mathfrak{X}}(R) \subseteq S_{\mathfrak{X}}(G)$ и $S(R) \cap S_{\mathfrak{X}}(G) \subseteq S_{\mathfrak{X}}(R)$. Следовательно, $S_{\mathfrak{X}}$ – индуктивный функтор. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс Шунка. Тогда подгрупповой функтор $P_{\mathfrak{F}}$ такой, что $P_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Proj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{\text{все } \mathfrak{F}\text{-проекторы группы } G\}$, является индуктивным.

Доказательство. Ввиду теоремы 2.3 подгрупповой функтор $P_{\mathfrak{F}}$ определен на группах из $\mathfrak{M}$. Согласно [3, с. 29] подгрупповой функтор $P_{\mathfrak{F}}$ является эпиморфным. Из определения $\mathfrak{F}$ -проектора и леммы 2.2 следует, что $P_{\mathfrak{F}}$ – индуктивный подгрупповой функтор. Лемма доказана.

4. Условия композиционности формации $\mathfrak{F}^h$. Выбор понятия эпиморфного функтора для наших целей мотивируется следующим наблюдением.

Предложение 4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и h – эпиморфный подгрупповой функтор. Тогда $\mathfrak{F}^h$ – формация.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}^h$ и $N \triangleleft G$. Если $H/N \in h(G/N)$, то согласно определению эпиморфного функтора найдется подгруппа R в G такая, что $H = RN$ и $R \in h(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F}^h$, то $R \in \mathfrak{F}$. Но тогда $H/N = RN/N \simeq R/R \cap N \in Q\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}^h = Q\mathfrak{F}^h$.

Пусть $G/N_i \in \mathfrak{F}^h$, $i = 1, 2$ и $N_1 \cap N_2 = 1$. Возьмем $A \in h(G)$. Тогда $AN_i/N_i \in h(G/N_i)$, $i = 1, 2$. Так как $G/N_i \in \mathfrak{F}^h$, то $AN_i/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Но тогда $AN_i/N_i \simeq A/N_i \cap A \in \mathfrak{F}$, а значит, $A/N_1 \cap N_2 \simeq A \in R_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}^h$ – формация. Предложение доказано.

Пусть h – некоторый подгрупповой функтор. Тогда c -характеристикой h назовем $K(h) = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}} K(h(G))$, где $K(h(G)) = \bigcup_{R \in h(G)} K(R)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и f – ее максимальный внутренний композиционный экран (см. теорему 2.1). Пусть h – эпиморфный подгрупповой функтор. С помощью h зададим новый композиционный экран f^* следующим образом: $f^*(S) = (f(S))^h$, если $S \in K(h)$; $f^*(S) = \mathfrak{F}^h$, если $S \in K(\mathfrak{M})/K(h)$.

Обозначим $\mathfrak{F}^* = CF(f^*)$.

Лемма 4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и h – эпиморфный подгрупповой функтор. Тогда $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^h$.

Доказательство. Пусть f – максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что множество $\mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}^h$ не пусто. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}^h$. Тогда в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $G/N \in \mathfrak{F}^h$. Если L/K – произвольный главный фактор группы G , то из $G \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G/C_G(L/K) \in (f(S))^h \subseteq \mathfrak{F}^h$, где $S \in K(L/K)$. Так как пересечение всех $C_G(L/K)$, где L/K пробегает все главные факторы группы G , равно $F(G)$ и $\mathfrak{F}^h = R_0\mathfrak{F}^h$, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}^h$. Значит, $N \subseteq F(G)$ и N – абелева p -группа, p – некоторое простое число.

Пусть $R \in h(G)$. Из $G/N \in \mathfrak{F}^h$ и $RN/N \in h(G/N)$ следует, что $RN/N \simeq R/R \cap N \in \mathfrak{F}$. Если $R \cap N = 1$, то $R \in \mathfrak{F}$. Пусть $R \cap N \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $G/C_G(N) \in (f(p))^h$, где $Z_p \in K(N) \subseteq K(h)$. Следовательно, $RC_G(N)/C_G(N) \simeq R/C_R(N) \in f(p)$. Заметим, что для любого главного фактора T_{i-1}/T_i группы R , лежащего на участке $1 = T_1 \subset \dots \subset T_n = R \cap N \subset \dots$, выполняется $R/C_R(T_{i-1}/T_i) \in f(p)$, $i = 1, \dots, n+1$. Откуда следует, что $R \in \mathfrak{F}$, а значит, $G \in \mathfrak{F}^h$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^h$. Лемма доказана.

Лемма 4.3 [11]. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что N – p -группа для некоторого простого числа p . Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H -главного фактора U/V группы N , то $H/C_H(N) \in \mathfrak{R}_p\mathfrak{F}$.

Выделим условие, накладываемое на подгрупповой функтор h .

Если G – монолитическая группа с абелевым монолитом N таким, что $K(N) \subseteq K(h)$ и $G/C_G(N) \in h(G/C_G(N))$, то $[N]G/C_G(N) \in h([N]G/C_G(N))$. (*)

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и h – индуктивный подгрупповой функтор, удовлетворяющий условию (*). Тогда $\mathfrak{F}^h$ – композиционная формация.

Доказательство. Пусть f – максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. С помощью h , как и выше, зададим композиционный экран f^* : $f^*(S) = (f(S))^h$, если $S \in K(h)$; $f^*(S) = \mathfrak{F}^h$, если $S \in K(\mathfrak{M})/K(h)$.

Установим, что $\mathfrak{F}^h = \mathfrak{F}^*$. Включение $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^h$ следует из леммы 4.2.

Докажем обратное включение. Предположим, что множество $\mathfrak{F}^h \setminus \mathfrak{F}^*$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , совпадающую с $\mathfrak{F}^*$ -корадикалом G . Рассмотрим два случая.

Пусть N – неабелева группа. Тогда $C_G(N) = 1$. Если $K(N) \not\subseteq K(h)$, то $f^*(S) = \mathfrak{F}^h$, где $S \in K(N)$. Так как $G \in \mathfrak{F}^h$, то $G/C_G(N) \simeq G \in \mathfrak{F}^h = f^*(S)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Получили противоречие с выбором G . Пусть $K(N) \subseteq K(h)$. Тогда $f^*(S) = (f(S))^h$ для $S \in K(N)$. Так как f – максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$ и S – неабелева группа, то $f(S) = \mathfrak{F}$. Но тогда $f^*(S) = \mathfrak{F}^h$. Аналогично, как и выше, доказывается, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Снова получили противоречие с выбором G .

Пусть N – абелева p -группа, где p – некоторое простое число. Рассмотрим $G/C_G(N)$. Покажем, что $G/C_G(N) \in f^*(p)$. Пусть $K(N)$ не содержится в $K(h)$. Тогда $f^*(p) = \mathfrak{F}^h$. Так как $G \in \mathfrak{F}^h$, то $G/C_G(N) \in \mathfrak{F}^h = f^*(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ следует $G \in \mathfrak{F}^*$. Противоречие.

Пусть $K(N) \subseteq K(h)$. В этом случае $f^*(p) = (f(p))^h$. Пусть $A/C_G(N) \in h(G/C_G(N))$. Рассмотрим случай, когда $A/C_G(N)$ – собственная подгруппа в $G/C_G(N)$. Из 1) определения 3.1 следует, что $h(A) \subseteq h(G)$. Отсюда и из $G \in \mathfrak{F}^h$ следует, что $A \in \mathfrak{F}^h$. Согласно выбору группы G подгруппа A принадлежит формации $\mathfrak{F}^*$. Отметим, что $N \subseteq A$. Пусть U/V – произвольный главный фактор группы A , лежащий ниже N . Так как $A \in \mathfrak{F}^*$, то $A/C_A(U/V) \in (f(p))^h$. Заметим, что $C_G(N) \subseteq C_A(N) \subseteq C_A(U/V)$. Так как $A/C_G(N) \in h(G/C_G(N))$, то из 2) определения 3.1 индуктивного подгруппового функтора следует, что $A/C_G(N) \in h(A/C_G(N))$. Отсюда $A/C_G(N)/C_G(U/V)/C_G(N) \simeq A/C_G(U/V) \in f(A/C_G(U/V))$. Следовательно, $A/C_G(U/V) \in f(p)$. Тогда по лемме 4.3 $A/C_A(N) \in \mathfrak{F}_p f(p) = f(p)$.

Пусть теперь $G/C_G(N) \in h(G/C_G(N))$. Рассмотрим $E = [N]G/C_G(N)$. Так как $G \in \mathfrak{F}^h$ и $\mathfrak{F}^h$ – формация, то согласно лемме Барнса–Кегеля (см. [2, с. 335]) $E \in \mathfrak{F}^h$. Так как функтор h удовлетворяет условию $(\cdot)$, то $E \in h(E)$. Но тогда $E \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $E/C_E(N) \simeq G/C_G(N) \in f(p)$. Таким образом, доказано, что $G/C_G(N) \in (f(p))^h$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Напомним [1], что насыщенный гомоморф $\mathfrak{X}$ называется экстремальным классом, если из того, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K и $G/K \in \mathfrak{X}$, всегда следует $G \in \mathfrak{X}$.

Следствие 4.4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – композиционная формация.

Следствие 4.4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – композиционная формация.

Пусть $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ – формация, $\pi = \pi(\mathfrak{X})$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Рассмотрим подгрупповой функтор $P_{\mathfrak{F}}$. По лемме 3.3 $P_{\mathfrak{F}}$ – индуктивный функтор. Нетрудно видеть, что $P_{\mathfrak{F}}$ удовлетворяет условию $(\cdot)$.

Следствие 4.4.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – композиционная формация и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{X}$ – насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{X}^{P_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ – композиционная формация.

Следствие 4.4.4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}$ – насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ – композиционная формация.

Эпиморфный подгрупповой функтор h называется функтором в смысле Скибы [3], если $(h(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq h(A)$ для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и $G \in h(G)$ для любой группы G .

Теорема 4.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и h – подгрупповой функтор в смысле Скибы. Тогда $\mathfrak{F}^h$ – композиционная формация.

Доказательство. Пусть f – максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. С помощью h , как и выше, зададим композиционный экран f^* : $f^*(S) = (f(S))^h$, если $S \in K(h)$; $f^*(S) = \mathfrak{F}^h$, если $S \in K(\mathfrak{M})/K(h)$.

Установим, что $\mathfrak{F}^h = \mathfrak{F}^*$. Включение $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^h$ следует из леммы 4.2.

Докажем обратное включение. Предположим, что множество $\mathfrak{F}^h \setminus \mathfrak{F}^*$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , совпадающую с $\mathfrak{F}^*$ -корадикалом группы G . Рассмотрим два случая.

Пусть N – неабелева группа. Тогда рассуждая аналогично, как и в теореме 4.4, можно показать, что $N = f^*$ -центральный главный фактор группы G . Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Противоречие с выбором G .

Пусть N – абелева p -группа, где p – некоторое простое число. Рассмотрим $G/C_G(N)$. Покажем, что $G/C_G(N) \in f^*(p)$. Пусть $K(N)$ не содержится в $K(h)$. Тогда $f^*(p) = \mathfrak{F}^h$. Так как $G \in \mathfrak{F}^h$, то $G/C_G(N) \in \mathfrak{F}^h = f^*(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Противоречие с выбором G .

Пусть $K(N) \subseteq K(h)$. В этом случае $f^*(p) = (f(p))^h$. Пусть $A/C_G(N) \in h(G/C_G(N))$. Из свойств функтора h следует, что $A \in h(G)$. Отсюда и из $G \in \mathfrak{F}^h$ следует, что $A \in \mathfrak{F}$. Отметим, что $N \subseteq A$. Пусть U/V – произвольный главный фактор группы A , лежащий ниже N . Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $A/C_A(U/V) \in f(p)$. Тогда по лемме 4.3 $A/C_A(N) \in \mathfrak{R}_p f(p) = f(p)$.

Таким образом, доказано, что $G/C_G(N) \in f^*(p) = (f(p))^h$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие 4.5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и h – подгрупповой функтор в смысле Скибы. Тогда $\mathfrak{F}^h$ – композиционная формация.

5. Заключение. Полученные выше теоремы 4.4 и 4.5 позволяют строить новые примеры композиционных формаций и исследовать подформации композиционных и локальных формаций конечных групп. Отметим следующие два применения теоремы 4.4.

5.1. Класс всех групп, у которых всякая разрешимая 2-порожденная подгруппа имеет нильпотентный коммутант, является композиционной формацией.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех разрешимых 2-порожденных групп. Используя лемму 25.2 из [1], нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}$ является индуктивным подгрупповым функтором, удовлетворяющим условию (*). Согласно [1, с. 36], класс всех групп, имеющих нильпотентный коммутант, образует локальную формацию. Теперь результат следует из теоремы 4.4.

5.2. Класс всех групп, у которых всякая разрешимая 2-порожденная подгруппа имеет нильпотентную длину, не превосходящую n (n – натуральное число), является композиционной формацией.

В случае, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F}^{S_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F}^S$ является максимальным наследственным подклассом класса $\mathfrak{F}$.

5.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация. Тогда $\mathfrak{F}^S$ – композиционная формация.

5.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Тогда $\mathfrak{F}^S$ – композиционная формация.

Замечание. В работе [12] построен пример локальной формации $\mathfrak{F}$, для которой $\mathfrak{F}^S$ – нелокальная формация.

Пусть h – подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе множество всех ее абнормальных подгрупп. Согласно [9], h является подгрупповым функтором в смысле Скибы.

5.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная (локальная) формация. Тогда класс всех групп, у которых каждая абнормальная подгруппа является $\mathfrak{F}$ -подгруппой, – композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп. – М., 1978. – 272 с.

2. **Doerk, K., Hawkes, T.** Finite soluble groups. – Berlin–N. Y., 1992. – 889 p.
3. **Каморников, С.Ф., Селькин, М.В.** Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Мн., 2003. – 254 с.
4. **Carter, R., Fischer, B., Hawkes, T.** Extreme classes of a finite soluble groups. // J. Algebra, 1968, vol. 9, № 3. – P. 285–313.
5. **Blessenohl, D.** Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z., 1975, Bd. 142, № 3. – S. 299–300.
6. **Doerk, K.** Zur Sättigung einer Formationen endlicher auflösbarer Gruppen // Arch. Math., 1977, Bd. 28. – S. 561–571.
7. **Воробьев, Н.Т.** О построении некоторых классов формаций // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн., 1984. – С. 39–47.
8. **Barnes, D.W., Kegel, O.H.** Gaschutz functors on finite soluble groups. // Math. Z., 1966, Bd. 94, № 2. – S. 134–142.
9. **Скиба, А.Н.** Алгебра формаций. – Мн., 1997. – 240 с.
10. **Erickson, R.** Projectors of finite groups // Commun. Algebra, 1982, vol. 10, № 18. – P. 1919–1938.
11. **Васильев, А.Ф., Васильева, Т.И.** О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Известия вузов. Математика, 1997, № 11 (426). – С. 10–14.
12. **Васильев, А.Ф.** О максимальной наследственной подформации локальной формации // Вопросы алгебры. – Мн., 1990. – Вып. 5. – С. 39–45.

S U M M A R Y

For a formation $\mathcal{F}$ of finite groups and a subgroup functor h the conditions under which the class of all finite groups with h -subgroups in $\mathcal{F}$ is a composition formation are found.

Поступила в редакцию 2.09.2006

УДК 517.977

С.В. Сергеев, О.В. Храмцов

Проблема управления в случае неединственного решения задачи Коши в начальной точке

Пусть процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = x^\alpha, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(t_*) = x^*, \quad (3)$$

где $x \in [0, \infty)$, $t \in [0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$ такое, что область существования решения $x \geq 0$.

Следуя [1] можно установить, что задача Коши (1), (2) имеет неединственное решение, которое представимо в виде $x = x_i(t)$, $x_i(t) \equiv 0$, $t \in [0, t'_i]$;

$x_2(t) = ((t - t'_1)(1 - \alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $t \in [t'_1, \infty)$. Поэтому неизвестно, по какому частному решению будет развиваться процесс. Теория управления [2] не рассмат-