

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Васильева Т. И.^{1,2}, Васильев А. Ф.¹, Симоненко Д. Н.²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Гомель, Республика Беларусь;

²Белорусский государственный университет транспорта,
Гомель, Республика Беларусь;

tivasilyeva@mail.ru, formation56@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Согласно [1] подгруппы A и B группы G называются взаимно перестановочными, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A . Изучению групп, представимых произведением своих взаимно перестановочных подгрупп, посвящены многочисленные работы различных авторов. Основные результаты, полученные в этом направлении до 2010 года, изложены в монографии [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс \mathfrak{F} называется MP -замкнутым в \mathfrak{X} , если \mathfrak{F} содержит всякую \mathfrak{X} -группу $G = AB$, где A и B — взаимно перестановочные \mathfrak{F} -подгруппы группы G .

Пустой класс считается MP -замкнутым в любом классе групп \mathfrak{X} .

ПРОБЛЕМА. Пусть \mathfrak{F} — формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и \mathfrak{X} — класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса \mathfrak{X} описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) \mathfrak{F} , MP -замкнутые в \mathfrak{X} .

Теорема. Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{F} — насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π -группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть H и F — максимальные внутренние локальные экраны \mathfrak{X} и \mathfrak{F} соответственно. Формация \mathfrak{F} является MP -замкнутой в \mathfrak{X} тогда и только тогда, когда $F(p)$ MP -замкнута в $H(p)$ для любого простого p .

Следствие 1 [3]. Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.

В работе [4] был исследован класс всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, и, в частности, было установлено, что этот класс является наследственной насыщенной формацией Фиттинга, содержащей все сверхразрешимые группы.

Следствие 2. Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B . Если в A и B любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of Finite Groups. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010.
2. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н. О MP -замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 9–17.
3. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989 V. 53, No 4. P. 318–326.
4. Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.