Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. И. Мурашко (Гомель, Беларусь)[1], А. Ф. Васильев (Гомель, Беларусь)[2]

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения из [9] и [15]. Одним из содержательных направлений теории групп является изучение структуры группы, представимой в произведение своих подгрупп, в зависимости от свойств сомножителей. К первым результатам данного направления относится знаменитая теорема Бернсайда о разрешимости бипримарных групп.

Во многих работах изучались формации групп, замкнутые относительно взятия произведений определённого типа подгрупп (произвольных [1], нормальных (субнормальных) [13], абнормальных и контранормальных [20] и т. д.). В последние годы активно проводятся исследования формаций, замкнутых относительно произведений обобщенно субнормальных подгрупп. Формации, замкнутые относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, изучались в работах [2, 6, 8] и др. Важную роль в этих исследованиях играют формации с условием Шеметкова, т. е. формации $\mathfrak{F}$, у которых всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо циклической группой простого порядка.

В 1938 Фиттинг [16] показал, что произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп нильпотентно. Это означает, что во всякой группе существует единственная максимальная нормальная нильпотентная подгруппа $\mathrm{F}(G)$, называемая подгруппой Фиттинга. Данная подгруппа оказывает большое влияние на строение конечной разрешимой группы. В связи с этим в работе [5] авторами было введено следующее определение.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется $\mathrm{F}(G)$-субнормальной, если H субнормальна в $H\mathrm{F}(G)$.

Пример 1. Очевидно, что всякая субнормальная подгруппа является $\mathrm{F}(G)$-субнормальной. Обратное утверждение неверно. Пусть $G \simeq S_4$ — симметрическая группа степени 4 и H — силовская 2-подгруппа G. Тогда H — максимальная подгруппа G и H не субнормальна в G. Заметим, что $\mathrm{F}(G) \subseteq H$. Таким образом, H — несубнормальная $\mathrm{F}(G)$-субнормальная подгруппа G.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы разрешимых групп. Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем $\mathrm{F}(G)$-радикальным в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B — $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G.

Определение 3. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется S_{ch}-замкнутым, если $\mathfrak{X}$ вместе со всякой группой G содержит все её подгруппы Шмидта.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_{ch}-замкнутая насыщенная формация разрешимых групп и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ $\mathrm{F}(G)$-радикальна в $\mathfrak{S}$;*

(2) *$\mathfrak{F}$ является наследственной формацией и существует разбиение $\sigma = \{\pi_i | i \in I\}$ множества простых чисел π на непересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\times} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.*

Следствие 1 [5]. *Пусть группа $G = AB$ — произведение нильпотентных $\mathrm{F}(G)$-субнормальных подгрупп. Тогда G нильпотентна.*

 Получено 25.12.2017. УДК 512.542.

[1] Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины. E-mail: mvimath@yandex.ru.

[2] Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины. E-mail: formation56@mail.ru.

Следствие 2. *Пусть групп $G = AB$ — произведение нильпотентных подгрупп. Если* $\mathrm{F}(G) \leq A \cap B$*, то G нильпотентна.*

Следствие 3. *Пусть π — множество простых чисел и разрешимая группа $G = AB$ — произведение π-разложимых* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальных подгрупп. Тогда G π-разложима.*

Замечание. Отметим, что класс групп $\underset{i\in I}{\times}\mathfrak{S}_{\pi_i} = (G \in \mathfrak{S} | G = O_{\pi_{i_1}}(G) \times \dots \times O_{\pi_{i_n}}(G))$ является решеточной формацией. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если пересечение и порождение $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп всегда является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой. Эти формации были изучены в [2].

Напомним [10, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$-*гиперцентром* группы G называется наибольшая нормальная подгруппа G, все G-главные факторы ниже которой $\mathfrak{F}$-центральны в G. Обозначается $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. В частности, если $\mathfrak{F}$ — класс всех нильпотентных групп, то $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\infty}(G)$ — гиперцентр группы G.

Теорема 2. *Пусть $\sigma = \{\pi_i | i \in I\}$ — разбиение множества простых чисел π на непересекающиеся подмножества, $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\times}\mathfrak{S}_{\pi_i}$ и разрешимая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-подгруппы G. Тогда $(A \cap B)_G \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Существуют примеры [21, с. 8] несверхразрешимых групп, являющихся произведением своих нормальных (субнормальных) сверхразрешимых подгрупп. С другой стороны, Бэр в [11] показал, что если группа G является произведением своих двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и ее коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. В работе [3] было показано, что всякая насыщенная наследственная формация радикальна в классе всех групп с нильпотентным коммутантом.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Любая наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F}$* $\mathrm{F}(G)$*-радикальна в $\mathfrak{X}$.*

(2) *Всякая группа из $\mathfrak{X}$ имеет нильпотентный коммутант.*

Интересная информация о группах, факторизуемых своими $\mathrm{F}(G)$-субнормальными сверхразрешимыми подгруппами была получена в работе [4].

По известной теореме Дёрка [14] группа сверхразрешима, если она содержит четыре сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. Этот результат был обобщен Крамером [19] на случай произвольной насыщенной формации метанильпотентных групп.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация метанильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G, имеющую три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы попарно взаимно простых индексов в G.*

Следствие 4. *Пусть группа G, содержит три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные подгруппы с нильпотентным коммутантом и попарно взаимно простыми индексами в G. Тогда коммутант G нильпотентен.*

Следствие 5. *Пусть группа G, содержит три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные метанильпотентные подгруппы с попарно взаимно простыми индексами в G. Тогда группа G метанильпотентна.*

В работе [17] Флаверс и Вэкефилд исследовали группы с тремя сверхразрешимыми подгруппами попарно взаимно простых индексов. В частности, если такая группа имеет нильпотентный коммутант, то она сверхразрешима. Нахождению условий, при которых группа, имеющая три сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами, сверхразрешима, посвящена работа [12] Баллестера-Болинше и Эсквэйро. Отметим, что в двух приведенных выше работах рассматривались только индуктивные условия, т. е. условия, сохраняющиеся при переходе к подгруппам и факторгруппам. Легко проверить, что свойство $\mathrm{F}(G)$-субнормальности в общем случае не переносится на подгруппы и на фактор-группы.

Следствие 6. *Пусть группа G, содержит три $\mathrm{F}(G)$-субнормальные сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами в G. Тогда группа G сверхразрешима.*

Фрисен [18] заметил, что если группа G есть произведение своих двух нормальных (субнормальных) сверхразрешимых подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в ней, то она сверхразрешима. Однако, следующий пример показывает, что в теореме Фрисена условие субнормальности нельзя заменить на $\mathrm{F}(G)$-субнормальность.

Пример 2. Пусть G — группа, изоморфная симметрической группе степени 3. Тогда существует точный неприводимый G-модуль V над полем $\mathbb{F}_7$. Пусть T — полупрямое произведение V и G. Рассмотрим $A = VG_3$ и $B = VG_2$, где G_p — силовская p-подгруппа G и $p \in \{2, 3\}$. Так как $7 \equiv 1 \pmod p$ для $p \in \{2, 3\}$, то нетрудно видеть, что A и B сверхразрешимы. Так как V — точный неприводимый G-модуль, то $\mathrm{F}(T) = \mathrm{F}_7(T) = V$. Таким образом, A и B — $\mathrm{F}(T)$-субнормальные подгруппы T. Заметим, что $T = AB$, но $T/\mathrm{F}_7(T)$ не является абелевой группой. Поэтому, группа T несверхразрешима.

Аналогом теоремы 2 является следующая

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация метанильпотентных групп и группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы A, B и C попарно взаимно простых индексов в G. Тогда $(A \cap B \cap C)_G \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Литература

1. *Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б.* Конечные группы с кратными факторизациями // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251—1263.
2. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Институт математики Академии наук Украины; редкол.: Н. С. Черников [и др.] Киев, 1993. С. 27—54.
3. *Васильев А. Ф., Симоненко Д. Н.* Относительно радикальные локальные формации // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2006. Т. 38, № 5. С. 19—25.
4. *Монахов В. С., Чирик И. К.* Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 40—46.
5. *Мурашко В. И., Васильев А. Ф.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2012. Т. 70, № 4. С. 24—27.
6. *Семенчук В. Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Математические заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261—266.
7. *Семенчук В. Н.* Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 1. С. 97—108.
8. *Семенчук В. Н., Шеметков Л. А.* Сверхрадикальные формации // Доклады НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 5. С. 24—26.
9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
10. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М. : Наука, 1989. 256 с.
11. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 318—326.
12. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Triple factorization and supersolubility of finite groups // Proc. of the Edinburg Math. Soc. 2016. Vol. 59, № 2. P. 301—309.
13. *Bryce R. A., Cossey J.* Fitting formations of finite soluble groups // Math. Z. 1972. Vol. 127, № 4. P. 217—223.
14. *Doerk K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Vol. 91, № 3. P. 198—205.
15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
16. *Fitting H.* Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1938. Vol. 48. P. 77—141.
17. *Flowers N., Wakefiels T. P.* On a group with three supersoluble subgroups of pairwise relatively prime indices // Arch. Math. 2010. Vol. 95. P. 309—315.
18. *Friesen D. K.* Products of normal supersolvable subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 30, № 1. P. 41—48.
19. *Kramer O. U.* Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes // Math. Z. 1974. Vol. 138, № 1. P. 63—68.
20. *Vasil'ev A. F.* On products of nonnormal subgroups of finite groups // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. Vol. 85, № 1. P. 305—311.
21. *Weinstein M.* Between nilpotent and soluble. Passaic : Polygonal Publishing House, 1982. 231 p.