Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

МАТЕМАТИКА

В. К. ДОМАНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ТЕОРИИ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

(Представлено академиком Ю. В. Линником 25 I 1971)

Пусть K — антагонистическая игра на квадрате $[-\lambda, \lambda] \times [-\lambda, \lambda]$ с ядром $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, зависящим от разности аргументов. Мы будем предполагать, что $\varphi(u)$ — вещественная функция, заданная на $(-\infty, \infty)$, и аналитическая на всей оси. Кроме того, мы будем считать φ функцией степенного роста на бесконечности, т. е. при достаточно больших k $\lim \varphi(u) u^{-k} = 0$ при $u \to \pm\infty$. Назовем такие игры играми типа A.

Если в игре с ядром $\varphi(\xi - \eta)$ игрок I применяет смешанную стратегию μ_1, а игрок II — смешанную стратегию μ_2, то мы можем понимать μ_1 и μ_2 как вероятностные меры с носителями на отрезке $[-\lambda, \lambda]$. При этом выигрыш игрока I, по определению (см. ([1])), равен

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \eta)\, d\mu_1(\xi)\, d\mu_2(\eta).$$

Стратегия μ_1 называется выравнивающей, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \eta)\, d\mu_1(\xi) = c = \mathrm{const} \tag{1}$$

для всех чистых стратегий игрока II, т. е. при $\eta \in [-\lambda, \lambda]$. Интеграл в (1) является аналитической функцией от η при $\eta \in (-\infty, \infty)$ ввиду того, что функция φ аналитическая, а мера μ_1 имеет компактный носитель. Но так как аналитическая функция, постоянная на отрезке, должна быть постоянна и во всей области определения, соотношение (1) выполняется при всех $\eta \in (-\infty, \infty)$. Если $\mu_1(\xi)$ — выравнивающая стратегия игрока I, то в наших условиях стратегия $\mu_2(\eta) = \mu_1(-\eta)$ будет выравнивающей стратегией игрока II. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \eta)\, d\mu_2(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta_1 - \xi_1)\, d\mu_1(\eta_1) = c,$$

где принято $\xi_1 = -\xi$, $\eta_1 = -\eta$, а $\mu_2(\eta) = \mu_1(-\eta)$ — вероятностная мера с носителем на том же отрезке $[-\lambda, \lambda]$. Ясно, что стратегии μ_1 и μ_2 в этом случае оказываются оптимальными.

Как известно (см. ([1])), если μ_1 — оптимальная стратегия игрока I, а $\bar{\eta} \in \operatorname{supp} \mu_2$ — точка спектра оптимальной стратегии игрока II, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \bar{\eta})\, d\mu_1(\xi) = v,$$

где v — значение игры. Пусть спектр какой-либо оптимальной стратегии игрока II содержит бесконечное множество точек. В таком случае для любой оптимальной стратегии $\mu_1(\xi)$ игрока I $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \eta)\, d\mu_1(\xi) = v$ при бесконечном числе значений η. Но так как этот интеграл является аналитической функцией от η, оптимальная стратегия μ_1 будет выравнивающей. Аналогичные соображения применимы к случаю, когда бесконечное число точек содержится в спектре оптимальной стратегии игрока I. Таким образом, для игр типа A возможны лишь две альтернативы:

а) оба игрока имеют выравнивающие оптимальные стратегии, б) ни один из игроков не имеет выравнивающих стратегий, и спектр каждой оптимальной стратегии каждого из игроков конечен.

Выясним, в каких случаях возможен вариант а). Ответ, хотя и неполный, на этот вопрос дается в следующей теореме.

Теорема 1. *Для того чтобы в игре типа А оба игрока имели выравнивающие оптимальные стратегии, необходимо, чтобы функция* φ *была представима в виде*

$$\varphi(u) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{l=1}^{p_k-1} a_l^{(k)} u^l \right) \cos x_k u + \left(\sum_{l=0}^{p_k-1} b_l^{(k)} u^l \right) \sin x_k u \right], \tag{2}$$

где x_k — *положительные вещественные числа, расположенные в порядке возрастания,* $a_l^{(k)}$ *и* $b_l^{(k)}$ — *произвольные вещественные числа, а* p_k — *натуральные числа, ограниченные в совокупности, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k / x_k^{1+\varepsilon} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Доказательство. *Пусть* $\mu_1(\eta)$ — такая вероятностная мера с носителем на отрезке $[-\lambda, \lambda]$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - \eta)\, d\mu_2(\eta) = c. \tag{4}$$

Обозначая $*$ операцию свертки, (4) можно записать как $\varphi * \mu_2 = c$. Применим к этому соотношению преобразование Фурье, рассматривая φ и μ_2 как обобщенные функции, принадлежащие пространству S' медленно растущих обобщенных функций на $(-\infty, \infty)$ (см. [2]). Для φ принадлежность S' гарантируется ее степенным ростом на бесконечности, а μ_2 принадлежит S' как мера с компактным носителем.

Обозначая через $\hat{a}$ преобразование Фурье обобщенной функции a, а через δ_x меру единичной массы, сосредоточенную в точке x, и принимая во внимание, что (см. [2]) $(\widehat{a * b}) = \hat{a} \cdot \hat{b}$ и $\hat{c} = c\delta_0$, мы получаем из (4) $\hat{\varphi} \cdot \hat{\mu}_2 = c\delta_0$.

Известно, что $\hat{\mu}_2$ как преобразование Фурье меры с носителем в шаре радиуса λ является целой голоморфной функцией первого порядка степени λ, ограниченной на вещественной оси, т. е. $|\hat{\mu}_2(x)| < Ce^{\lambda |\mathrm{Im}\, x|}$.

Произведение $\hat{\varphi} \cdot \hat{\mu}_2$ должно быть как обобщенная функция равно нулю везде, кроме точки 0. Но функция $\hat{\mu}_2(x)$ ввиду голоморфности имеет лишь изолированные нули, причем, как известно (см. [3]), если $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ — нули целой голоморфной функции первого порядка, расположенные в порядке возрастания модулей, а p_k — их кратности, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k / |x_k|^{1+\varepsilon} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Следовательно, $\hat{\varphi}$ должна быть обобщенной функцией с дискретным носителем, причем порядок $\hat{\varphi}$ в точке x_k должен быть меньше кратности нуля функции $\hat{\mu}_2(x)$ в этой точке. Ввиду того, что $\hat{\varphi}$ — преобразование Фурье вещественной функции, обобщенная функция, сосредоточенная в точке $(-x_k)$, должна быть комплексно сопряжена обобщенной функции, сосредоточенной в точке x_k. Принимая во внимание, что (см. [2]), обобщенная функция, сосредоточенная в точке, представляет собой линейную комбинацию δ-функции и ее производных, а в нуле должна находиться мера $c\delta_0$, мы получаем

$$\hat{\varphi} = c\delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{p_k-1} \left(c_l^{(k)} \delta_{x_k}^{(l)} + \bar{c}_l^{(k)} \delta_{-x_k}^{(l)} \right),$$

где x_k и p_k удовлетворяют соотношению (3), а через $\bar{z}$ обозначено число, комплексно-сопряженное z. Применяя обратное преобразование Фурье и полагая $a_l^{(k)} = 2\,\mathrm{Re}\,[c_l^{(k)}(iu)^l]$, $b_l^{(k)} = -2\,\mathrm{Im}\,[c_l^{(k)}(iu)^l]$, мы получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 1 непосредственно следует отсутствие выравнивающих стратегий и конечность спектра оптимальных стратегий для таких классов игр, как например, игры с рациональной функцией выигрыша, зависящей от разности аргументов, или для игр типа A с функцией $\varphi(u)$, стремящейся к нулю при $u \to \pm\infty$ (см. ([1])). Если функция ограничена, то условие теоремы 1 превращается в условие почти-периодичности φ, и таким образом мы приходим к выводу, что для существования выравнивающих стратегий в играх типа A с ограниченной на всей оси функцией φ необходимо, чтобы φ была почти-периодична.

Приведем некоторое достаточное условие существования у игр типа A оптимальных выравнивающих стратегий, дающее известные возможности их конструктивного построения.

Теорема 2. *Пусть K — игра типа A на квадрате $[-\lambda, \lambda] \times [-\lambda, \lambda]$ с ядром $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где $\varphi(u)$ — функция вида* (2). *Положим $p_k' = \max\left(0, p_k - \sum\limits_{(l)} p_{k_l}'\right)$, где $k_l < k$, $x_k = (2n+1)x_{k_l}$. Если*

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k'}{x_k} \leqslant \lambda, \tag{5}$$

то игра имеет оптимальную выравнивающую стратегию.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \prod_k \cos^{p_k'}\frac{\pi}{2}\frac{x}{x_k}.$$

Легко проверить, что условие (5) обеспечивает сходимость этого произведения на всей комплексной плоскости. Оно определяет целую функцию первого порядка, ограниченную на вещественной оси, равную единице в нуле. Ее значения в симметричных точках вещественной оси вещественны и равны. Степень ее равна $\frac{\pi}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{p_k'}{x_k} \leqslant \lambda$. По теореме Пэли — Винера она является преобразованием Фурье некоторой вещественной меры μ_2 единичной массы с носителем на отрезке $[-\lambda, \lambda]$, причем, как предел свертки положительных мер, эта мера сама положительна. Легко видеть, что нули функции $f(x)$ в точках x_k имеют порядок не меньший, чем порядок обобщенной функции $\hat{\varphi}$ в этих точках и, следовательно, $\hat{\varphi}f = c\delta_0$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi - \eta)\,d\mu_2(\eta) = \varphi * \mu_2 = c.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим игру с ядром $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где $\varphi(u)$ — аналитическая на всей оси функция вида

$$\varphi(u) = c + \sum_{k=1}^{\infty}(a^{(k)}\cos kx_0u + b^{(k)}\sin kx_0u).$$

В таком виде можно представить любую периодическую аналитическую функцию с периодом $2\pi / x_0$. Теорема 2 показывает, что можно рассчитывать найти решение в форме преобразования Фурье функции

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi x}{2^k x_0} = \frac{x_0 \sin(\pi x/x_0)}{\pi x}.$$

Но, как легко проверить, эта функция является преобразованием Фурье меры, задаваемой плотностью

$$\check{f}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |u| \geqslant \pi/x_0, \\ 1 & \text{при} \quad |u| < \pi/x_0. \end{cases}$$

Мы получаем известный результат (см. [1]), что для периодических, зависящих от разности аргументов ядер мера Лебега на отрезке длины, равной периоду, является оптимальной выравнивающей стратегией.

Пример 2. Рассмотрим игру с ядром $K(\xi - \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где $\varphi(u)$ — аналитическая на всей оси функция вида

$$\varphi(u) = c + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_0^{(k)} + a_1^{(k)} u) \cos kx_0 u + (b_0^{(k)} + b_1^{(k)} u) \sin kx_0 u.$$

Используя теорему 2, найдем решение этой игры в форме обратного преобразования Фурье функции

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2 \frac{\pi x}{2^k x_0} = \frac{x_0^2 (1 - \cos(2\pi x/x_0))}{\pi^2 x^2},$$

имеющей требуемые нули требуемой кратности. Эта функция является преобразованием Фурье меры, задаваемой плотностью

$$\check{f}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u \geqslant \dfrac{2\pi}{x_0}, \\ \dfrac{x_0}{2\pi}\left(\dfrac{x_0}{2\pi} x + 1\right) & \text{при} - \dfrac{2\pi}{x_0} < u < 0, \\ \dfrac{x_0}{2\pi}\left(-\dfrac{x_0}{2\pi} x + 1\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant u < \dfrac{2\pi}{x_0}. \end{cases}$$

Мы получаем оптимальную выравнивающую стратегию для нашей игры в случае $\lambda \geqslant 2\pi / x_0$. Легко проверить, что в случае $\lambda < 2\pi / x_0$ выравнивающих стратегий не существует.

Замечание. Из полученных результатов не следует, что в случае существования оптимальных выравнивающих стратегий таковыми должны быть все оптимальные стратегии. Но легко видеть, что, если выравнивающая стратегия имеет носитель, содержащийся в отрезке $[-\nu, \nu]$, где $\nu < \lambda$, то свертка μ с любой вероятностной мерой, носитель которой содержится в отрезке $[-(\lambda - \nu), (\lambda - \nu)]$, также является оптимальной выравнивающей стратегией. Поэтому мы можем получить оптимальную стратегию с носителем, содержащим бесконечное число точек, и, следовательно, в этом случае любая оптимальная стратегия оказывается выравнивающей. С другой стороны, если в этих условиях удается найти оптимальную стратегию, преобразование Фурье которой имеет только те нули, которые требуются теоремой 1, то любая другая оптимальная стратегия представляется как свертка этой, в известном смысле, минимальной стратегии с некоторой вероятностной мерой. Таким образом можно получить описание всех оптимальных стратегий игры.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-математического института
Академии наук СССР

Поступило
29 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1967. [2] К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. [3] С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, 2, ИЛ, 1962.