Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 517.537 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, И. Г. МЕХТИЕВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДОВ ТЕЙЛОРА — ДИРИХЛЕ

В настоящей статье изучается распределение нулей последовательности частных сумм $S_n(z)$ ряда Тейлора — Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

где $\lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_n \geqslant \lambda_{n-1}$ и $\{m_n\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Подобная задача рассмотрена в [1] в случае $m_n = n$; $\lambda_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ для ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и результаты перенесены на ряды Дирихле $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ в [2] в случае $m_n = 0$, $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant \beta > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Прежде чем сформулировать основную теорему, обозначим через G_1 и G_2 соответственно следующие множества точек z:

$$G_1 = \{x > 0,\ |z| > (c+\delta)e^{\alpha_2 x}\},\quad G_2 = \{x \leqslant 0,\ |z| > (c+\delta)e^{\alpha_1 x}\},$$

где δ — некоторое фиксированное положительное число.

Кроме того, обозначим через $F_1[\psi(|z|;\ \alpha_1]$ и $F_2[\psi(|z|);\ \alpha_2]$ соответственно множества точек:

$$F_1 = F_1[\psi(|z|);\ \alpha_1] = \{x \leqslant 0,\ \alpha_1 x - \operatorname{In}|z| < \psi(|z|),$$
$$F_2 = F_2[\psi(|z|);\ \alpha_2] = \{x > 0,\ \alpha_2 x - \operatorname{In}|z| < -\psi(|z|),$$

где $\psi(z)$ — произвольно заданная функция такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \psi(r) = \infty. \tag{2}$$

Наконец, обозначая через $E(R)$ круг радиуса R с центром в начале координат, положим

$$F_R = \{F_1[\psi(|z|);\ \alpha_1] \cup F_2[\psi(|z|);\ \alpha_2]\} \cap \{G_1 \cup G_2 \setminus E(R)\}, \tag{3}$$

где α_1 и α_2 — положительные числа такие, что

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant (\lambda_n - \lambda_{n-\nu}) \,/\, (m_n - m_{n-\nu}) \leqslant \alpha \leqslant \infty$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Из равенства (2) следует, что при достаточно больших R $F = F_R \cup \cup \{E(R) \cap [G_1 \cup G_2]\} \subset G_1 \cup G_2$ и границы областей F и $G_1 \cup G_2$ совпадают внутри круга $E(R)$.

Теорема. *Пусть последовательности $\{m_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ удовлетворяют условиям $m_n - m_{n-1} \geqslant 1$ при любом n, и*

$$\varliminf_{n\to\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1})/(m_n - m_{n-1}) = \sigma_1,\quad \varlimsup_{n\to\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1})/(m_n - m_{n-1}) = \sigma_2, \tag{5}$$

где σ_1 и σ_2 — положительные числа $(0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \infty,\ 0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \infty)$, *а после-*

довательность коэффициентов $\{a_n\}$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_{n-1}/a_n|^{1/(m_n-m_{n-1})} = c < \infty. \qquad (6)$$

Тогда число нулей любой функции $S_n(z)$ из последовательности частных сумм $\{S_n(z)\}$ ряда (1) ограничена во всякой области F одним и тем же числом.

Доказательство. Заметим, что из условия (5) следует, что существуют такие положительные числа α_1 и α_2, для которых справедлива формула (4).

Применяя признак сходимости Даламбера, нетрудно показать, что ряд (1) расходится в областях

$$D_1 = \{x > 0, |z| > c \exp(\sigma_2 x)\}, \quad D_2 = \{x \leqslant 0, |z| > c \exp(\sigma_1 x)\}.$$

Очевидно, при любом $\delta > 0$, $G_1 \subset D_1$ и $G_2 \subset D_2$, так как $\sigma_1 \geqslant \alpha_1$ и $\sigma_2 \leqslant \alpha_2$ (см. ([3])).

Из условия (6) следует, что при любом ε $(0 < \varepsilon < \delta)$ найдется достаточно большое число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n - k \geqslant N(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$|a_{n-k} / a_{n-k+1}| < (c + \varepsilon)^{m_{n-k+1} - m_{n-k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$|a_{n-k} / a_n| < (c + \varepsilon)^{m_n - m_{n-k}}$$

для любых k и n таких, что $n - k \geqslant N(\varepsilon)$. Если положим $A = \max\left(1, \max_{0\leqslant i\leqslant N} \prod_0^i A_j\right)$, где A_j такие, что $|a_j / a_{j+1}| < A_j(c+\varepsilon)^{m_{j+1} - m_j}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, тогда для всех n и k $(k \leqslant n)$ будет справедливо неравенство

$$|a_{n-k} / a_n| < A(\varepsilon)(c+\varepsilon)^{m_n - m_{n-k}}.$$

Учитывая (7), будем иметь

$$\left|\frac{S_n(z)}{a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}}\right| < 1 + A(\varepsilon) \exp\left\{(m_n - m_{n-1})\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{m_n - m_{n-1}} x - \ln|z| + \ln(c + \varepsilon)\right]\right\} + \ldots + A(\varepsilon) \exp\left\{(m_n - m_0)\left[\frac{\lambda_n - \lambda_0}{m_n - m_0} x - \ln|z| + \ln(c+\varepsilon)\right]\right\}. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что если $z \in G_1$, то

$$\left|\frac{S_n(z)}{a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}}\right| < 1 + A(\varepsilon) \exp\{(m_n - m_{n-1})[\alpha_2 x - \ln|z| + \ln(c+\varepsilon)]\} + \ldots$$

$$\ldots + A(\varepsilon) \exp\{(m_n - m_0)[\alpha_2 x - \ln|z| + \ln(c+\varepsilon)]\} < 1 + A(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c+\varepsilon}{c+\delta}\right)^n.$$

Следовательно, взяв $\varepsilon < \delta$, приходим к выводу, что при $z \in G_1$

$$|S_n(z) / (a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z})| < M_1,$$

где M_1 не зависит от z и n. Аналогично доказывается, что при $z \in G_2$ справедливо неравенство $|S_n(z) / (a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z})| < M_2$.

Таким образом, доказано, что семейство функций $\{S_n(z) / (a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z})\}$ равномерно ограничено в области $G_1 \cup G_2$, а из этого следует нормальность данной системы функций.

Покажем, что в области F_R при достаточно большом R все $S_n(z)$ не имеют нулей. Действительно, пусть $z \in F_R$ и $x > 0$, тогда имеем

$$\left|\frac{S_n(z)}{a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}}\right| > 1 - \left[\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^{m_n - m_{n-1}} \exp\{-(\lambda_n - \lambda_{n-1})x\}} + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^{m_n - m_0} \exp\{-(\lambda_n - \lambda_0)x\}}\right].$$

Так как $x \in F_R$ и $x > 0$, то в силу (7) и (4) получаем

$$\left|\frac{S_n(z)}{a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}}\right| > 1 - (A(\varepsilon) \exp\{(m_n - m_{n-1})[\alpha_2 x - \ln|z| + \ln(c+\varepsilon)]\} + \ldots + $$
$$+ A(\varepsilon)\{\exp\{(m_n - m_0)[\alpha_2 x - \ln|z| + \ln(c+\varepsilon)]\}.$$

Следовательно, при достаточно больших R, $z \in F_R$, $x > 0$, и в силу (2) имеем

$$|S_n(z)/(a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z})| > 1 - A(\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}((c+\varepsilon)/e^{\psi(|z|)})^n = \gamma > 0. \qquad (8)$$

Аналогично доказывается, что при больших R, $z \in F_R$, и $x \leqslant 0$ все $S_n(z)$ также не имеют нулей. Таким образом, мы убеждаемся в том, что все $S_n(z)$ в области F_R не имеют нулей.

Теперь покажем, что число нулей функции $S_n(z)$ ограничено в области $E = E(R) \cap [G_1 \cup G_2]$ одним и тем же числом, не зависящим от n. Предположим противное. Выберем последовательность положительных чисел таких, что $m_k > m_{k-1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$ и $S_{n_k}(z)/(a_{n_k} z^{m_{n_k}} e^{-\lambda_{n_k} z})$ есть функция, число нулей которой не меньше m_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

В силу нормальности этой последовательности из нее можно выделить последовательность

$$\{S_{p_k}(z)/(a_{p_k} z^{m_{p_k}} e^{-\lambda_{p_k} z})\}, \qquad (9)$$

равномерно сходящуюся в области $\overline{E}$ к аналитической функции $\varphi(z)$, которая в силу (8) не равна тождественно нулю. Применяя к последовательности (9) теорему Гурвица, придем к противоречию. Итак, теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы остается в силе, если числа m_n и λ_{n} $(n = 0, 1, \ldots)$ удовлетворяют условиям

$$m_n \geqslant m_{n-1}, \quad \lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant \beta > 0.$$

В этом случае равенства (5) и (6) заменяются, естественно, следующими:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{m_n - m_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = \sigma_1'; \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{m_n - m_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = \sigma_2'; \qquad (10)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_{n-1}/a_n|^{1/(\lambda_n - \lambda_{n-1})} = c_1 < \infty. \qquad (11)$$

Из условий (10) следует, что существуют положительные числа α_1' и α_2', удовлетворяющие неравенству

$$0 \leqslant \alpha_1' \leqslant \frac{(m_n - m_{n-\nu})}{(\lambda_n - \lambda_{n-\nu})} \leqslant \alpha_2' \leqslant \infty \quad (\nu = 1, \ldots, n). \qquad (12)$$

Кроме того, области G_1, G_2, D_1 и D_2 заменяются соответственно следующими областями:

$$G_1' = \{|z| > 1, x < \alpha_2' \ln|z| - \ln(c_1 + \delta)\},$$
$$G_2' = \{|z| \leqslant 1, x < \alpha_1' \ln|z| - \ln(c_1 + \delta)\},$$

$$D_1' = \{|z| > 1, x < \sigma_2' \ln|z| - \ln c_1\}, \quad D_2' = \{|z| \leqslant 1, x < \sigma_1' \ln|z| - \ln c_1\}.$$

Здесь рассматривается область

$$F_1' = F_1'[\psi(|z|), \alpha_2'] = \{|z| > 1, x - \alpha_2' \ln|z| < -\psi(|z|)\},$$

где $\lim \psi(r) = \infty$, а также $F_R' = F_1'[\psi(|z|);\ \alpha_2'] \cap \{G_1' \cup G_2' \setminus E(R)\}$, и утверждение теоремы справедливо в области $F' = F'_R \cup \{E(R) \cap {}_2[G_1 \cup \cup G_2']\}$. Из нашей теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Если коэффициенты степенного ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n/a_{n+1}| = 1, \tag{13}$$

то число нулей последовательности $S_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$ *ограничено в области* $|z| > 1 + \delta$, *где* δ — *любое сколь угодно малое число* *.

В самом деле, полагая $\lambda_n = 0$ и $m_n = n$ $(n = 0, 1, \ldots,)$, находим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, выполняется равенство (13), области G_1 и G_2 имеют вид $G_1 = \{x > 0,\ |z| > 1 + \delta\}$; $G_2 = \{x \leqslant 0,\ |z| > 1 + \delta\}$ и область F превращается в область $|z| > 1 + \delta$.

Следствие 2. *Если для рядов Дирихле* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *выполняется условие* **:

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant \beta > 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_{n-1}/a_n|^{1/(\lambda_n - \lambda_{n-1})} = 1, \tag{14}$$

то число нулей последовательности $S_n|z| = \sum_0^n a_k e^{-\lambda_k z}$ *ограничено во всякой области* Q, *лежащей в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < -\ln(1 + \delta)$, $\delta > 0$, *причем* Q *такая, что если* z *стремится к бесконечности вдоль ее границы, то* $\operatorname{Re} z \to -\infty$.

В самом деле, в случае $m_n = 0$ и $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant \beta > 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$ находим, что $\alpha_1' = \alpha_2' = 0$, выполняется равенство (14) и области G_1' и G_2' имеют вид

$$G_1' = \{|z| > 1,\ x < -\ln(1 + \delta)\}; \quad G_2' = \{|z| \leqslant 1,\ x < -\ln(1 + \delta)\}.$$

Очевидно, в этом случае в качестве области F' можно взять любую область Q, лежащую в полуплоскости $x < -\ln(1 + \delta)$, $\delta > 0$.

Заметим, что область F зависит от выбора функции $\psi(r)$ и числа R. Если функция $\psi(r)$ растет достаточно медленно, то граница области не обязательно уходит «влево».

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
16 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. И. Краснощекова, Тр. Московск. авиацион. инст., в. 61 (1956). [2] С. В. Фоменко, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 1 (38) (1964). [3] Г. Л. Лунц, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, 14, № 2 (1961).

* Это утверждение доказано в (1).

** Это утверждение, являющееся аналогом следствия 1 для рядов Дирихле, показано в (2).