Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. Е. КАШКАХА

О НУЛЯХ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 3 II 1971)

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение эллиптического типа второго порядка

$$\Delta\varphi(x, y) + a(x, y)\varphi_x(x, y) + b(x, y)\varphi_y(x, y) + c(x, y)\varphi(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a, b, c — ограниченные в некоторой области $\mathscr{D}$ функции.

В случае, когда $c(x, y) \equiv 0$, известна классическая теорема Карлемана о единственности: *градиент каждого решения, имеющий нуль бесконечного порядка в некоторой точке области $\mathscr{D}$ или имеющий внутреннюю предельную точку нулей, тождественно равен нулю.*

В настоящей заметке доказывается аналогичное утверждение для градиента решения φ уравнения (1) при произвольной функции $c(x, y) \neq 0$ в $\mathscr{D}$.

2. Не нарушая общности можно считать, что градиент функции φ имеет нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$. Будем говорить, что точка $z = 0$ является **нулем бесконечного порядка** функции w, если отношение

$$f_n(x, y) = w(x, y) / z^n \qquad (2)$$

при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ является ограниченной функцией в некоторой фиксированной окрестности U точки $z = 0$, т. е. $|f_n| \leqslant K_n$ для некоторой постоянной K_n при $z \in U$.

Лемма. *Если комплекснозначная функция $w \in C_{\bar z}(\mathscr{D})$ имеет нуль бесконечного порядка в точке $z = 0 \in \mathscr{D}$, то производная этой функции $w_{\bar z} = {}^1/_2(\partial w / \partial x + i\,\partial w / \partial y)$ равна нулю в этой точке.*

Доказательство. Вырежем из области $\mathscr{D}$ круг $S_\varepsilon \subseteq U$ с центром в точке $z = 0$ радиуса ε и к оставшейся области $\mathscr{D} - S_\varepsilon$ применим формулу Грина

$$\iint\limits_{\mathscr{D}-S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{w}{z^n \bar z^n}\right) dx\,dy = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\mathscr{D}} \frac{w}{\bar z^n z^n}\,dz - \frac{1}{2i}\iint\limits_{\partial S_\varepsilon} \frac{w}{z^n \bar z^n}\,dz$$

или

$$\iint\limits_{\mathscr{D}-S_\varepsilon} \frac{w_{\bar z}}{|z|^{2n}}\,dx\,dy = n\iint\limits_{\mathscr{D}-S_\varepsilon} \frac{w}{z^n \bar z^{n+1}}\,dx\,dy + \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\mathscr{D}} \frac{w\,dz}{|z|^{2n}} - \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial S_\varepsilon} \frac{w\,dz}{|z|^{2n}}. \qquad (3)$$

Так как $\left|\dfrac{w}{z^n \bar z^{n+1}}\right| \leqslant K_{2n+1}$, $\left|\displaystyle\int\limits_{\partial S_\varepsilon} \frac{w}{|z|^{2n}}\,dz\right| \leqslant 2\pi K_{2n}\varepsilon$, то переходя в (3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{w_{\bar z}}{|z|^{2n}}\,dx\,dy = n\iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{w}{z^n \bar z^{n+1}}\,dx\,dy + \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\mathscr{D}} \frac{w}{|z|^{2n}}\,dz. \qquad (4)$$

Если функция $w'_{\bar z}|_{z=0} = \chi(x, y) + i\omega(x, y)|_{z=0} \neq 0$, то ввиду непрерывности $w_{\bar z}$ найдется такая окрестность S_δ точки $z = 0$, что или $\chi(x, y)$ или $\omega(x, y)$ имеют постоянный знак. Переписав формулу (4) в виде

$$\iint\limits_{S_\delta} \frac{w_{\bar z}}{|z|^{2n}}\, dx\, dy = n \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{w\, dx\, dy}{z^n \bar z^{n+1}} + \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial\mathscr{D}} \frac{w}{|z|^{2n}}\, dz - \iint\limits_{\mathscr{D}-S_\delta} \frac{w_{\bar z}}{|z|^{2n}}\, dx\, dy \qquad (5)$$

и обозначив первую часть (5) константой $M_n = A_n + iB_n$, получим

$$\iint\limits_{S_\delta} \frac{\chi(x, y)}{|z|^{2n}}\, dx\, dy = A_n, \quad \iint\limits_{S_\delta} \frac{\omega(x, y)}{|z|^{2n}}\, dx\, dy = B_n. \qquad (6)$$

Пусть $\chi(x, y) > 0$ в $\bar S_\delta$, тогда

$$A_n = \iint\limits_{S_\delta} \frac{\chi(x, y)}{|z|^{2n}}\, dx\, dy \geqslant \min_{z \in \bar S_\delta} \chi(x, y) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\delta} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^{2n}} = \infty,$$

что противоречит (6).

Пусть $\chi(x, y) < 0$ в S_δ, тогда

$$-A_n = -\iint\limits_{S_\rho} \frac{\chi(x, y)}{|z|^{2n}}\, dx\, dy \geqslant \min_{z \in S_\delta} [-\chi(x, y)] \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\delta} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^{2n}} = \infty,$$

что снова противоречит (6). Аналогично доказывается, что $\omega(x, y)|_{z=0} = 0$. Таким образом, $w_{z=0} = 0$ и лемма доказана.

3. Если воспользоваться обозначениями (см. ([1])) $u = \varphi_x$, $v = -\varphi_y$, $w = u + iv = 2\partial_z\varphi$, то уравнение (1) эквивалентно паре уравнений

$$\partial_{\bar z} w + Aw + B\bar w + {}^1\!/_2 c\varphi = 0, \quad \partial_{\bar z}\varphi - {}^1\!/_2 \bar w = 0, \qquad (7)$$

где $A(x, y) = {}^1\!/_4(a + ib)$, $B(x, y) = {}^1\!/_4(a - ib)$.

Систему (7) рассмотрим в некотором круге $S \subseteq U$ радиуса R, содержащем точку $z = 0$. Допустим, что функция w имеет нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$. Тогда из леммы следует, что в точке $z = 0$ производная $w_{\bar z}$ равна нулю. Из первого уравнения системы (7) получаем $\varphi(0, 0) = 0$ ввиду $c(x, y) \neq 0$ в $\mathscr{D}$.

Используя неравенство $\max\limits_S |\varphi| \leqslant L \max\limits_S |w|$ (см. ([3])), убеждаемся, что функция

$$\Phi_n(x, y) = \varphi(x, y) / z^n \qquad (8)$$

ограничена в S. Подставив вместо $w(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ их выражения из (2) и (8) через f_n, Φ_n, считая $z \neq 0$, в уравнение (7), получаем

$$\partial_{\bar z} f_n + Af_n + (\bar z/z)^n B\bar f_n + {}^1\!/_2 c\Phi_n = 0, \quad \partial_{\bar z}\Phi_n - {}^1\!/_2 (\bar z/z)^n \bar f_n = 0. \qquad (9)$$

Сводя систему (9) к системе интегральных уравнений ([1]) и следуя рассуждениям Карлемана ([2]), получаем неравенство

$$\iint\limits_{S_\rho} |w|\, dx\, dy \leqslant \frac{2R}{1 - 16KR} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int\limits_{\partial S_\rho} (|w| + |\varphi|)\, |dz|, \qquad (10)$$

где $K = \max(|A|, |B|, |c/2|, {}^1\!/_2)$, $1 - 16KR > 0$ и $\rho < R$. Так как n произвольно, то правая часть (10) как угодно мала при достаточно больших n, т. е. $w \equiv 0$ в S_ρ. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Градиент каждого решения* $\varphi \in C_2(\mathscr{D})$ *уравнения* (1) $c(x, y) \neq 0$ *в* $\mathscr{D}$ *не может иметь внутри области* $\mathscr{D}$ *нулей бесконечного порядка.*

4. Как показывает простой пример уравнения

$$\Delta\varphi + (x + y + 3)\varphi_x + (x + y - 3)\varphi_y - 4\varphi = 0$$

в области $|z| \leqslant 1$, градиент $w = 2(x + y)(1 - i)$ решения $\varphi(x + y)^2 + 1$ обращается в нуль на прямой $y = -x$, т. е. градиент φ может иметь линии нулей первого порядка.

Теорема 2. *Градиент решения* $\varphi \in C_2(\mathscr{D})$ *не может иметь внутри области* $\mathscr{D}$ *предельной точки нулей второго порядка.*

Действительно, пусть $z_j \to z_0 \in \mathscr{D}$. Если $w(z_j) = 0$ и $|w / (z - z_j)^2| < K_j$ для $z \in U$, то $w_{\bar{z}}(z_j) = 0$ ввиду леммы. Из уравнения (1) следует, ввиду $c(x, y) \neq 0$ в $\mathscr{D}$, что $\varphi(z_j) = 0$. Замечая, что $\varphi(z) \Big/ \prod\limits_{j=1}^{n} (z - z_j) = \Phi_n(z)$ — функция, ограниченная в окрестности каждой точки z_j и проводя рассуждения, как и при доказательстве теоремы (1), получаем $w \equiv 0$ в U.

Теорема 3. *Градиент решения* $\varphi \in C_2(\mathscr{D})$ *не может иметь в области* $\mathscr{D}$ *замкнутых линий нулей, гомотопных нулю.*

Пусть, для определенности, $c(x, y) < 0$ и градиент функции φ обращается в нуль на замкнутой линии $\gamma \subset \mathscr{D}$. В области $\mathscr{D}_\gamma$, ограниченной кривой γ, функция $\varphi(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума (положительного максимума). Указанный минимум (максимум) достигается функцией $\varphi(x, y)$ в точке $z_1 \in \gamma$, но тогда из принципа Жиро ([3]), для любого направления l такого, что $\cos \widehat{lN} < 0$, следует $\partial\varphi / \partial l|_{z_1 \in \gamma} > 0$ ($\partial\varphi / \partial l|_{z_1 \in \gamma} < 0$), чего не может быть, так как по предположению в любой точке γ $\varphi_x = \varphi_y = 0$.

5. Теорема 4. *Индекс изолированного нуля* $z = 0 \in \mathscr{D}$ *функции* $w = \varphi_x - i\varphi_y$ *порядка* $n \geqslant 2$ *равен* n.

Пусть градиент $w = \varphi_x - i\varphi_y$ имеет в точке $z = 0 \in \mathscr{D}$ нуль n-го порядка ($n \geqslant 2$). Тогда $\varphi_{xx}(0, 0) = \varphi_{yy}(0, 0) = 0$ и из уравнения (1), ввиду $c(x, y) \neq 0$, следует, что $\varphi(0, 0) = 0$, причем $|\varphi| = O(|z|^{n+1})$. В достаточно малой окрестности U точки $z = 0$ решение φ может быть представлено в виде $\varphi = \varphi_0\psi$, где φ_0 — некоторое положительное решение уравнения (1), а ψ — решение уравнения

$$\Delta\psi + (a + 2\varphi_{0x} / \varphi_0)\psi_x + (b + 2\varphi_{0y} / \varphi_0)\psi_y = 0.$$

Пусть $w_1 = \psi_x - i\psi_y$, $w_0 = \varphi_{0x} - i\varphi_{0y}$, тогда $w = \varphi_0 w_1 + \psi w_0$ и, так как $|w| = O(|z|^n)$, $\psi = O(|z|^{n+1})$, то $w_1 = O(|z|^n)$. Из этих оценок вытекает, что поля w и w_1 гомотопны. Индекс нулевой точки поля w_1 равен n (см. ([1])). Так как гомотопные поля w и w_1 имеют одинаковые вращения, то теорема доказана.

Индекс $\varkappa$ нуля первого порядка градиента $w = \varphi_x - i\varphi_y$ может равняться ± 1, как показывает простой пример

$$\Delta\varphi + x\varphi_x + y\varphi_y - 2\varphi = 0.$$

Одним из решений этого уравнения является функция $\varphi_1 = x^2 + y^2 = 2$, $w_1 = \varphi_{1x} - i\varphi_{1y} = 2\bar{z}$ и $\varkappa = -1$. Другим решением этого же уравнения является функция $\varphi_2 = x^2 - y^2$, $w_2 = \varphi_{2x} - i\varphi_{2y} = 2z$, $\varkappa = +1$.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность И. И. Данилюку за внимание к работе.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук СССР

Поступило
27 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] T. Carleman, C. R., 197, 471 (1933). [3] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения с частными производными, М., 1966.