Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

А. П. КОМБАРОВ

О Σ-ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 I 1971)

В тихоновском произведении пространств $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ выберем некоторую точку $s = \{s_\alpha\}$ и рассмотрим всюду плотное подпространство $\Sigma \subseteq X$, состоящее из всех точек $x \in X$, для которых множество $Q(x) = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq s_\alpha\}$ не более чем счетно. Это подпространство называется Σ-произведением пространств X_α, $\alpha \in A$ ([1]). Σ-произведение, отличное от произведения пространств, не может быть паракомпактом. В ([1]) было показано, что Σ-произведение полных метрических пространств коллективно нормально. В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема 1. *Σ-произведение полных (в смысле Чеха) паракомпактов, теснота любого конечного произведения которых счетна *, коллективно нормально.*

Замечание. Σ-произведение, совпадающее с произведением полных паракомпактов, по теореме Фролика ([4]) является полным паракомпактом, поэтому естественно рассматривать только Σ-произведения, не совпадающие с произведением пространств.

Определение ([1]). Система множеств $h = \{H_t \subseteq X\colon t \in T\}$ разделяется в открытом множестве $\Gamma \subseteq X$, если для некоторой дизъюнктной системы открытых множеств $\{U_t\colon t \in T\}$ при каждом $t \in T$ выполняется включение $H_t \cap \Gamma \subseteq U_t$.

Следующая лемма представляет собой усиление леммы 1 из ([1]).

Лемма 1. *Пусть $\gamma = \{\Gamma_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ — открытое покрытие паракомпакта Y, и пусть для любого $\lambda \in \Lambda$ система множеств $h = \{H_t \subseteq X \times Y\colon t \in T\}$ разделяется в $p^{-1}(\Gamma_\lambda)$, где p — проекция $X \times Y$ на Y.*

Тогда h разделяется в $X \times Y$.

Доказательство. Существует открытое локально конечное покрытие $\{V_\xi\colon \xi \in \Xi\}$ паракомпакта Y такое, что замкнутое покрытие $\{[V_\xi]\colon \xi \in \Xi\}$ вписано в γ. Для каждого $\xi \in \Xi$ выберем $\lambda(\xi) \in \Lambda$ так, чтобы $[V_\xi] \subseteq \Gamma_{\lambda(\xi)}$. Поскольку система h разделяется в $p^{-1}(\Gamma_{\lambda(\xi)})$, существует дизъюнктная система открытых множеств $\{U_t^\xi \subseteq X \times Y\colon t \in T\}$ такая, что $H_t \cap p^{-1}(\Gamma_{\lambda(\xi)}) \subseteq U_t^\xi$ для любого $t \in T$. Пусть $W_t^\xi = U_t^\xi \cap p^{-1}(V_\xi)$; $K_{t'}^\xi = [\bigcup\limits_{t\neq t'} W_t^\xi]$. Тогда $K_{t'}^\xi \subseteq p^{-1}([V_\xi]) \setminus U_{t'}^\xi \subseteq p^{-1}(\Gamma_{\lambda(\xi)}) \setminus U_{t'}^\xi$, и поэтому $K_{t'}^\xi \cap H_{t'} = \phi$. Система замкнутых множеств $\{K_{t'}^\xi\colon \xi \in \Xi\}$ консервативна при каждом $t' \in T$. Поэтому множество $L_{t'} = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} K_{t'}^\xi$ замкнуто и не пересекается с $H_{t'}$. Отсюда следует, что множество $U_{t'} = (\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} W_{t'}^\xi) \setminus L_{t'}$ открыто и содержит $H_{t'}$. Нетрудно убедиться, что система $\{U_{t'}\colon t' \in T\}$ дизъюнктна.

Лемма 2. *Пусть система $h = \{H_t \subseteq Y\colon t \in T\}$ не разделяется в коллективно нормальном Γ, открытом в Y.*

---

* Теснота пространства X счетна, если для любого множества $M \subseteq X$ и любой точки $x \in [M]$ существует не более чем счетное множество $M' \subseteq M$, замыкание которого содержит точку x ([2]).

Тогда в T найдутся непересекающиеся подмножества T' и T'', для которых $\Gamma \cap [h(T')] \cap [h(T'')] = \phi$, где $h(T^*) = t \in T^* H_t$.

Доказательство теоремы. Пусть X_α — полный паракомпакт для всех $\alpha \in A$. В полном пространстве X_α существует счетная полная система открытых покрытий* $\varphi_\alpha = \{\gamma_m{}^\alpha\}$ ([3]). В силу паракомпактности пространств X_α покрытия $\gamma_m{}^\alpha$, $m = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in A$, можно предполагать состоящими из открытых F_σ-множеств, причем для любого $\Gamma \in \gamma_{m+1}^{\alpha}$ $[\Gamma] \subseteq \Gamma'$ при некотором $\Gamma' \in \gamma_m{}^\alpha$. Пусть R — конечное подмножество A. $X_R = \prod_{\alpha \in R} X_\alpha$. Обозначим через p_R проекцию $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на X_R и, если $R' \subseteq R$, то через $p_{R'}{}^R$ обозначим проекцию X_R на $X_{R'}$. Пусть $\gamma_m{}^R = \{\bigcap_{\alpha \in R} (p_\alpha{}^R)^{-1}(\Gamma^\alpha)\colon \Gamma^\alpha \in \gamma_m{}^\alpha\}$; $\varphi_R = \{\gamma_m{}^R\}$. Тогда X_R — полный паракомпакт ([4]), а φ_R — счетная полная система покрытий X_R открытыми F_σ-множествами, причем для любого $\Gamma \in \gamma_{m+1}^{R}$ $[\Gamma] \subseteq \Gamma'$ при некотором $\Gamma' \in \gamma_m{}^R$.

Предположим, что система множеств $h = \{H_t \subseteq \Sigma\colon t \in T\}$ не разделяется в Σ. Тогда h не разделяется и в X, поскольку $\Sigma \subseteq X$. Последовательности точек $M_1 = \{x^{1j}\colon j = 1, 2, \ldots\}$ и $N_1 = \{y^{1j}\colon j = 1, 2, \ldots\}$ выбираются в $h(T) = \bigcup_{t \in T} H_t$ произвольно. Множества $Q(x^{1j})$ и $Q(y^{1j})$ не более чем счетны, занумеруем их: $Q(x^{1j}) = \{\alpha_i{}^{1j}\colon i = 1, 2, \ldots\}$, $Q(y^{1j}) = \{\beta_i{}^{1j}\colon i = 1, 2, \ldots\}$, $j = 1, 2, \ldots$ Пусть $R_1 = \{\alpha_1{}^{11}, \beta_1{}^{11}\}$. Из леммы 1 следует, что h не разделяется в $p_{R_1}{}^{-1}(\Gamma_1)$ для некоторого открытого F_σ-множества $\Gamma_1 \in \gamma_1{}^{R_1}$, поэтому система множеств $\{p_{R_1}(H_t)\colon t \in T\}$ не разделяется в паракомпакте Γ_1, и с помощью леммы 2 легко находится точка $z_1 \in \Gamma^1 \cap \cap [p_{R_1}(h(T_1'))] \cap [p_{R_1}(h(T_1''))]$, где $T_1' \cap T_1'' = \phi$.

Предположим теперь, что при $k < n$ в $h(T)$ выбраны последовательности точек $M_k = \{x^{kj}\}$ и $N_k = \{y^{kj}\}$. $Q(x^{kj}) = \{\alpha_i{}^{kj}\}$; $Q(y^{kj}) = \{\beta_i{}^{kj}\}$. Пусть также построены конечные множества $R_k \subseteq A$ и определены такие открытые F_σ-множества $\Gamma_k \subseteq X_{R_k}$, что h не разделяется в $p_{R_k}^{-1}(\Gamma_k)$, и $\Gamma_k \subseteq \Gamma$ при некотором $\Gamma \in \gamma_k{}^{R_k}$. Предположим, далее, что выбраны точки $z_k \in \Gamma_k \cap \cap [p_{R_k}(h(T_k'))] \cap [p_{R_k}(h(T_k''))]$ и $T_1' \cap T_1'' = \phi$.

Теснота пространства $X_{R_{n-1}}$ счетна, поэтому можно выбрать последовательности точек $M_n = \{x^{nj}\}$ и $N_n = \{y^{nj}\}$ так, чтобы $M_n \subseteq h(T'_{n-1})$, $N_n \subseteq h(T''_{n-1})$ и $z_{n-1} \in [p_{R_{n-1}}(M_n)] \cap [p_{R_{n-1}}(N_n)]$. Пусть $Q(x^{nj}) = \{\alpha_i^{nj}\colon i = 1, 2, \ldots\}$, $Q(y^{nj}) = \{\beta_i^{nj}\colon i = 1, 2, \ldots\}$, $j = 1, 2, \ldots$ Определим множество $R_n = \{\alpha_i^{kj}, \beta_i^{kj}\colon k \leqslant n,\ j \leqslant n,\ i \leqslant n\}$. Ясно, что $R_n \supseteq R_{n-1}$. Множество $Y_n = (p_{R_{n-1}}^{R_n})^{-1}(\Gamma_{n-1})$ открыто и является F_σ-множеством в паракомпакте X_{R_n}. Система открытых множеств $\eta_n = \{\Gamma \cap Y_n\colon \Gamma \in \gamma_n^{R_n}\}$ покрывает паракомпакт Y_n. Поскольку система h не разделяется в $p_{R_{n-1}}^{-1}(\Gamma_{n-1}) = p_{R_n}^{-1}(Y_n)$, из леммы 1 следует, что h не разделяется в $p_{R_n}^{-1}(\Gamma_n)$ для некоторого $\Gamma_n \in \eta_n$. Очевидно, Γ_n — открытое F_σ-множество в паракомпакте X_{R_n} и по лемме 2 найдется точка $z_n \in \Gamma_n \cap \cap [p_{R_n}(h(T'_n))] \cap [p_{R_n}(h(T''_n))]$, причем $T'_n \cap T''_n = \phi$. ‖

Пусть $B = \bigcup_{k,\, j=1}^{\infty} Q(x^{kj}) \cup Q(y^{kj})$. Ясно, что $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. В X_{R_k} рассмотрим множества $C_m^k = \{c_i = p_{R_k}(z_i)\colon i \geqslant m\}$, $m = k, k+1, \ldots$ Нетрудно

---

* Система открытых покрытий $\{\gamma_m\}$ называется полной, если пересечение любой центрированной системы замкнутых множеств $\{P_s\colon s \in S\}$ такой, что для каждого m найдутся $s \in S$ и $\Gamma \in \gamma_m$, для которых $P_s \subseteq \Gamma$, не пусто.

убедиться, что каждое C^{k}_{m+1} содержится в некотором $\Gamma \in \gamma^{R_k}_{m+1}$ и, следовательно, $[C^k_{m+1}] \subseteq \Gamma'$ для некоторого $\Gamma' \in \gamma^{R_k}_m$. Поскольку последовательность покрытий $\varphi_{R_k} = \{\gamma^{R_k}_m \colon m = 1, 2, \ldots\}$ полна, а система замкнутых множеств $\{[C^k_m] \colon m = k, k+1, \ldots\}$ центрирована, отсюда следует, что $\phi \neq \bigcap\limits_{m=k}^{\infty} [C^k_m] = E_k$. Очевидно, E_k — бикомпакт, причем, как легко проверяется, $p^{R_{k+1}}_{R_k}(E_{k+1}) \subseteq E_k$, поэтому можно выбрать точки $\xi_k \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots$, так, чтобы $p^{R_{k+1}}_{R_k}(\xi_{k+1}) = \xi_k$. Определим теперь точку $x \in \Sigma$ условиями $p_{R_k}(x) = \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $p_\alpha(x) = s_\alpha$, если $\alpha \in A \setminus B$. Произвольно выбранная окрестность точки x содержит некоторую окрестность $U = p^{-1}_{R_k}(U^k) \cap \bigcap\limits_{\alpha \in W} p^{-1}_\alpha(U^\alpha)$, где U^k — окрестность точки ξ_k в X_{R_k}, W — конечное подмножество $A \setminus B$, а U^α открыто в X_α и содержит точку s_α при $\alpha \in W$. $U^k \cap C^k_m \neq \phi$, выберем точку $c_i \in U^k \cap C^k_m$, $c_i = p_{R_k}(z_i)$, $i \geqslant m \geqslant k$. Пусть $U^i = (p^{R_i}_{R_k})^{-1}(U^k)$. Тогда $U = p^{-1}_{R_i}(U^i) \cap \bigcap\limits_{\alpha \in W} p^{-1}_\alpha(U^\alpha)$. U^i — окрестность точки z_i, поэтому найдутся точки $x^{i+1j'} \in M_{i+1} \subseteq h(T'_i)$ и $y^{i+1j''} \in N_{i+1} \subseteq h(T''_i)$, для которых $p_{R_i}(x^{i+1j'})$, $p_{R_i}(y^{i+1j''}) \in U^i$. Нетрудно заметить, что $p_\alpha(x^{i+1j'}) = p_\alpha(y^{i+1j''}) = s_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus B$. Поэтому точки $x^{i+1j'}$ и $y^{i+1j''}$ лежат в U. С другой стороны, эти точки принадлежат различным множествам системы h, поскольку $T'_i \cap T''_i = \phi$. Следовательно, система h не может быть дискретной в Σ. Теорема доказана.

Непосредственным следствием доказанной теоремы является

Теорема 2. *Σ-произведение полных паракомпактов, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, коллективно нормально.*

Следствие 1 (H. H. Corson). *Σ-произведение полных метрических пространств коллективно нормально.*

Следствие 2. *Σ-произведение бикомпактов, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, коллективно нормально.*

Приведем пример ненормального Σ-произведения бикомпактов. Пусть мощность множества A равна $\mathfrak{c}$. Через Σ_1 обозначим Σ-произведение дискретных двоеточий D_α, $\alpha \in A$. Σ_1 — всюду плотное счетнокомпактное подпространство обобщенного канторова дисконтинуума $D^{\mathfrak{c}}$, причем $\beta\Sigma_1 = D^{\mathfrak{c}}$ [5]. Счетнокомпактный паракомпакт является бикомпактом, а так как Σ_1, очевидно, не бикомпактно, то Σ_1 и не паракомпактно. Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \times D^{\mathfrak{c}}$. Легко видеть, что Σ является Σ-произведением сепарабельных бикомпактов $D^{\mathfrak{c}}$ и D_α, $\alpha \in A$, и если $\Sigma = \Sigma_1 \times \beta\Sigma_1$ нормально, то по теореме Тамано [6], Σ_1 паракомпактно, что не так. Заметим также, что Σ-произведение паракомпактов с первой аксиомой счетности может не быть нормальным пространством [7, 8].

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. И. Пономареву, под руководством которого была выполнена эта работа.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. H. Corson, Am. J. Math., 81, 785 (1959). [2] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, 182, 993 (1968). [3] R. Engelking, Outline of General Topology, Amsterdam, 1968. [4] Z. Frolik, Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., 8, 747 (1960). [5] I. Glicksberg, Trans. Am. Math. Soc., 90, 369 (1959). [6] H. Tamano, Pacific J. Math., 10, 1043 (1960). [7] R. H. Sorgenfrey, Bull. Am. Math. Soc., 53, 631 (1947). [8] E. Michael, Bull. Am. Math. Soc., 69, 375 (1963).