Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. А. НЕМИЛОСТИВАЯ, И. В. ПАРУКЕВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Практическое пособие

для студентов
специальностей 6-05-0533-01 «Физика»,
6-0533-02 «Прикладная физика», 6-0533-04-02 «Компьютерная физика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2025

УДК 517.953(076)
ББК 22.161.614я73
Н502

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук Л. П. Авдашкова,
кандидат физико-математических наук В. Е. Евдокимович

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Немилостивая, В. А.
Н502 Дифференциальные уравнения высших порядков : практическое пособие / В. А. Немилостивая, И. В. Парукевич ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2025. – 47 с.
ISBN 978-985-32-0076-8

Практическое пособие разработано в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Физика», «Прикладная физика», «Компьютерная физика». В издании содержится материал по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков».

Адресовано студентам специальностей 6-05-0533-01 «Физика», 6-0533-02 «Прикладная физика», 6-0533-04-02 «Компьютерная физика».

УДК 517.953(076)
ББК 22.161.614я73

ISBN 978-985-32-0076-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В практическом пособии рассмотрены методы решения задач по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков» из курса «Дифференциальные и интегральные уравнения». Дифференциальные уравнения входят составной частью в математическую основу всех разделов общей и теоретической физики, а также других курсов естественнонаучных дисциплин, читаемых студентам физических специальностей. Для студентов данных специальностей эта дисциплина важна, в первую очередь, тем, что она вырабатывает навыки построения математических моделей реальных физических процессов, а также навыки решения и разностороннего анализа возникающих при этом математических задач. В результате изучения учебной дисциплины специалист обязан уметь составлять, решать и исследовать дифференциальные уравнения. Именно поэтому основной целью данного пособия является создание удобного в использовании дидактического модуля, позволяющего, с одной стороны, обеспечить преподавателю высокий методический уровень проведения практических занятий, а с другой стороны, оказать помощь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений высшего порядка путём самостоятельного решения задач.

Каждая тема содержит необходимый теоретический материал и типовые примеры, иллюстрирующие основные методы решения дифференциальных уравнений высших порядков. Подбор задач осуществлён в соответствии с расположением учебного материала в программе дисциплины. В пособие также включено большое число задач для аудиторной и самостоятельной работы, качественный уровень которых отвечает требованиям образовательных компетенций будущих специалистов по физике и прикладной физике.

1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дифференциальное уравнение порядка n ($n > 1$) имеет вид

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где функция, стоящая в правой части равенства, предполагается непрерывной в некоторой области изменения своих аргументов.

Решением этого уравнения называется *непрерывно дифференцируемая функция* $y = \varphi(x)$, определённая и n раз дифференцируемая в промежутке (a, b), если она обращает уравнение в тождество.

Задача Коши для этого уравнения ставится следующим образом: Найти такое решение дифференциального уравнения, чтобы оно само и его производные до порядка $(n-1)$ включительно при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимали бы заданные значения, то есть чтобы это решение удовлетворяло условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

где $x_0, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ – заданные числа, которые называются *начальными условиями*. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка имеет в своём составе n произвольных постоянных и имеет вид

$$F(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0.$$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений порядка выше первого, которые допускают понижение порядка и интегрируются в квадратурах.

1 *Уравнения, содержащие только производную порядка n и независимую переменную.*

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) находится с помощью n-кратного интегрирования по следующей схеме:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y = \int dx\int dx\ldots\int f(x)dx + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

2 *Уравнения, не содержащие искомой функции.*

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Порядок его может быть понижен на единицу с помощью замены $y' = z(x)$, где $z(x)$ – новая искомая функция. Эта подстановка приводит к уравнению

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Если уравнение (2) не содержит ни искомой функции y, ни её производных до $(k-1)$ порядка включительно, т. е. имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

то его порядок может быть понижен на k единиц при помощи подстановки $y^{(k)} = z(x)$. После определения функции $z(x)$ уравнение (3) приводится к уравнению (1). К этому же типу относятся и такие, которые содержат только две последовательные производные, т. е. уравнения вида

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{4}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$, то оно принимает вид

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$$

и интегрируется подстановкой $y^{(n-1)} = z(x)$.

Если $z = \varphi(x, C_1)$ – общее решение последнего уравнения, то с учётом замены получаем

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1).$$

Это уравнение вида (1), его общее решение может быть найдено с помощью $(n-1)$ интегрирования (при этом вводятся ещё $(n-1)$ произвольных постоянных $C_2, C_3, ..., C_n$).

3 *Уравнения, не содержащие независимой переменной.*

Эти уравнения имеют в общем случае такой вид:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

Понижение порядка на единицу достигается заменой $y' = z(y)$, где $z(y)$ – новая искомая функция. В этом случае за независимую переменную принимается y. Поэтому вторая и последующие производные имеют вид

$$y'' = \frac{dz}{dy} z, \; y''' = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z$$

и так далее. Поэтому уравнение (5) перепишется так:

$$F(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Если удастся найти общее решение этого уравнения, то оно будет иметь вид

$$\varphi(y, z, C_1, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Возвращаясь к старой переменной, будем иметь дифференциальное уравнение первого порядка, из которого определится функция y.

4 Отметим, что уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

во многих случаях допускает параметрическое представление $x = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – дифференцируемая функция. В этом случае удаётся найти общий интеграл в параметрической форме.

5 Рассмотрим уравнение вида (2), где функция F является однородной с показателем однородности m, т. е.

$$F(x, \lambda^t y', \lambda^t y'', ..., \lambda^t y^{(n)}) = \lambda^{mt} F(x, y', y'', ..., y^{(n)}).$$

С помощью замены $y' = yu$ порядок уравнения понижается на единицу, при этом:

$$y'' = y(u^2 + u'), ..., y^{(n)} = yg(u, u', ..., u^{(n-1)}).$$

Подставив в уравнение, получим

$$F(x, 1, u, u^2 + u', ..., g(u, u', ..., u^{(n-1)})) = 0.$$

Если известно общее решение этого уравнения $u = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$, то общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) dx}.$$

6 Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где левая часть является точной производной некоторой функции, т. е.

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Такие уравнения называются *уравнениями в точных производных*. Из последнего равенства следует, что соотношение

$$\Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C_1$$

является первым интегралом уравнения. Таким образом, уравнения в точных производных допускают понижение порядка на единицу.

Примеры решений типовых задач

1 Найти общее решение уравнения $y''' = \sin x - \cos x$.

Решение. Это уравнение первого типа

$$y'' = \int (\sin x - \cos x)dx + C_1 = -\cos x - \sin x + C_1.$$

Аналогично получаем

$$y' = \int (-\cos x - \sin x + C_1)dx + C_2 = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (-\sin x + \cos x + C_1 x + C_2)dx + C_3 = \cos x + \sin x + 0,5C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \cos x + \sin x + 0,5C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2 Найти общее решение уравнения $xy^{IV} - y''' = 0$.

Решение. Это уравнение второго типа. Положим $y''' = z$, тогда $y^{(4)} = z'$ и уравнение примет вид

$$xz' - z = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его

$$x\frac{dz}{dx} - z = 0,$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|z| = \ln|z| + \ln|C|,$$

$$z = Cx.$$

Подставляя эту функцию в уравнение $y''' = z$, получаем $y''' = Cx$, откуда

$$y'' = \int Cx dx + C_1 = \frac{Cx^2}{2} + C_1,$$

$$y' = \int \left(0{,}5Cx^2 + C_1\right) dx + C_2 = \frac{Cx^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{Cx^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) dx + C_3 = \frac{Cx^4}{24} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \dfrac{Cx^4}{24} + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

3 Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' = e^x (y')^2$.

Решение. Положив $y' = z(x)$ относительно z, получим уравнение Бернулли:

$$z' + 2z = e^x z^2.$$

Очевидно, последнее уравнение допускает решение $z = 0$. Разделив левую и правую части на $z^2 \neq 0$ и положив $z^{-1} = u$ относительно u, получим линейное уравнение первого порядка

$$u' - 2u = -e^x,$$

общее решение которого имеет вид

$$u = e^{2x}(C_1 + e^{-x}).$$

Используя указанную замену, имеем

$$z = \frac{1}{u} = \frac{1}{C_1 e^{2x} + e^x},$$

$$y = \int \frac{dx}{C_1 e^{2x} + e^x} + C_2 = -e^{-x} - C_1 x + C_1 \ln\left|1 + C_1 e^x\right| + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Решением уравнения является также функция $y = C$.

Ответ: $y = -e^{-x} - C_1 x + C_1 \ln\left|1 + C_1 e^x\right| + C_2$, $y = C$.

4 Проинтегрировать уравнение $y'' - xy''' + \left(y''\right)^2 = 0$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции и её производной. Положив $y'' = u$, где u – новая неизвестная функция, получим

$$u - xu' + u^2 = 0.$$

Разделяем переменные при $u \neq 0, \quad u \neq -1$:

$$\frac{du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + \ln C \,(C > 0),$$

$$\left|\frac{u}{u+1}\right| = C|x|, \ \frac{u}{u+1} = C_1 x \,(C_1 \neq 0),$$

откуда $u = y'' = \dfrac{C_1 x}{1 - C_1 x}$.

Последовательным интегрированием находим

$$y' = \int \frac{C_1 x - 1 + 1}{1 - C_1 x} dx + C_2 = \int \left(-1 + \frac{1}{1 - C_1 x}\right) dx + C_2 = -x - \frac{1}{C_1} \ln|1 - C_1 x| + C_2,$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{C_1} x \ln|1 - C_1 x| + \frac{1}{C_1} x + \frac{1}{C_1^2} \ln|1 - C_1 x| + C_2 x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные ($C_1 \neq 0$).

Рассмотрим случаи $u = 0$ и $u = -1$. Имеем $u = 0$, откуда $y = ax + b$; $u = -1$, откуда $y = -0{,}5x^2 + cx + d$, где a, b, c, d – произвольные постоянные. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти функции также являются решениями данного уравнения.

5. Найти решение задачи Коши

$$2yy'' + \left(y'\right)^2 + \left(y'\right)^4 = 0, \ y(0) = 1, y'(0) = 2,$$

предварительно убедившись, что искомое решение существует и единственно.

Решение. Перепишем данное уравнение:

$$y'' = -\frac{(y')^2 + (y')^4}{2y}. \qquad (7)$$

Правая часть уравнения (7) – функция

$$f(x, y, y') = -\frac{(y')^2 + (y')^4}{2y}$$

непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$$f'_y = \frac{(y')^2 + (y')^4}{2y^2}, \quad f'_{y'} = -\frac{y' + (y')^3}{y}$$

в окрестности точки $(0,1,2)$.

Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. Данное уравнение не содержит явно независимой переменной x (4-й тип). Положим $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция. Тогда относительно $p(y)$ получим уравнение

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 + p^4 = 0.$$

Для искомого решения $p \neq 0, \quad y \neq 0$. Поэтому, разделяя переменные, получим

$$-\frac{d(p^2)}{p^2 + p^4} = \frac{dy}{y},$$

откуда

$$\ln\frac{p^2+1}{p^2} = \ln C|y| \quad (C > 0), \quad \frac{p^2+1}{p^2} = C_1 y \quad (C_1 \neq 0) \qquad (8)$$

Постоянную C_1 найдём, используя начальные условия. Поскольку $y(0) = 1, \quad y'(0) = p(1) = 2 > 0,$ из (8) следует, что

$$C_1=\frac{5}{4},\quad p=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}.$$

Согласно произведённой замене, имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}},\quad \sqrt{\frac{5}{4}y-1}=dx,$$

$$\frac{8}{15}\left(\frac{5}{4}y-1\right)^{\frac{3}{2}}=x+C_2.$$

Из последнего равенства, учитывая начальные условия, найдём $C_2=\frac{1}{15}.$

Поэтому $y=\frac{1}{15}(15x+1)^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{5}.$

Ответ: $y=\frac{1}{15}(15x+1)^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{5}.$

6 Проинтегрировать уравнение $yy''-(y')^2=y^2\ln y$ в области $y>0,\ y'>0.$

Решение. Уравнение не содержит явно независимой переменной x (4-й тип). Положив $y'=p,$ где $p=p(y)$ – новая неизвестная функция, получим

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^2\ln y.$$

Домножим обе части уравнения на $\frac{2}{y}$:

$$2p\frac{dp}{dy}-\frac{2}{y}p^2=2y\ln y,\ \text{или}$$

$$\frac{d\left(p^2\right)}{dy}-\frac{2}{y}p^2=2y\ln y.$$

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно функции p^2. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$p^2 = e^{\int \frac{2}{y}dy}\left[C_1 + \int 2y\ln y e^{-\int \frac{2}{y}dy}\right],$$

откуда $p^2 = y^2\left(C_1 - \ln^2 y\right)$, и так как $y > 0,\ p > 0,$ то $p = y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}.$
В силу произведённой замены, имеем

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}, \quad \frac{dy}{y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}} = dx,$$

$$\ln\left|\ln y + \sqrt{C_1 + \ln^2 y}\right| = x + \ln C \quad \left(C > 0\right),$$

$$\ln y + \sqrt{C_1 + \ln^2 y} = C_2 e^x \quad \left(C_2 \neq 0\right).$$

Из последнего равенства находим

$$C_1 + \ln^2 y = C_2^2 e^{2x} - 2C_2 e^x \ln y + \ln^2 y,$$

$$\ln y = \frac{C_2^2 e^{2x} - C_1}{2C_2 e^x}, \quad y = e^{\frac{C_2^2 e^{2x} - C_1}{2C_2 e^x}}.$$

Ответ: $y = e^{\frac{C_2^2 e^{2x} - C_1}{2C_2 e^x}}$.

7 Решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''^3 - 2y'' - x = 0.$$

Решение. Замена: $y'' = z,$ тогда уравнение примет вид

$$x = z^3 - 2z.$$

Так как

$$dy' = y''dx = z\left(3z^2 - 2\right)dz = \left(3z^3 - 2z\right)dz,$$

то

$$y' = \int\left(3z^3 - 2z\right)dz = \frac{3}{4}z^4 - z^2 + C_1.$$

Так как

$$dy = y'dx = y'd(z^3 - 3z) = \left(\frac{3}{4}z^4 - z^2 + C_1\right)(3z^2 - 2)dz,$$

То

$$y = \int\left(\frac{3}{4}z^4 - z^2 + C_1\right)(3z^2 - 2)dz = \frac{9}{28}z^7 - \frac{9}{10}z^5 + \left(\frac{2}{3} + C_1\right)z^3 - 2C_1 z + C_2.$$

Ответ: общее решение в параметрической форме имеет вид $y = \frac{9}{28}z^7 - \frac{9}{10}z^5 + \left(\frac{2}{3} + C_1\right)z^3 - 2C_1 z + C_2,\ x = z^2 - 2z.$

8 Проинтегрировать уравнение $x^4 y'' + \left(xy' - y\right)^3 = 0.$

Решение. Положим

$$F\left(x, y, y', y''\right) = x^4 y'' + \left(xy' - y\right)^3.$$

Имеем

$$F\left(\lambda^t x, \lambda^{kt} y, \lambda^{(k-1)t} y', \lambda^{(k-2)t} y''\right) = \lambda^{4t}\lambda^{(k-2)t} x^4 y'' + \left(\lambda^t \lambda^{(k-1)t} xy' - \lambda^{kt} y\right)^3 =$$

$$= \lambda^{(k+2)t} x^4 y'' + \lambda^{3kt}\left(xy' - y\right)^3 = \lambda^{3t} F\left(x, y, y', y''\right) \quad \left(k = 1\right),$$

откуда следует, что данное уравнение является обобщённо-однородным ($m = 3,\ k = 1$). Выполним замену

$$x = e^t, \quad y = ue^t.$$

Тогда

$$y' = u' + u, \quad y'' = \left(u'' + u'\right)e^{-t}.$$

Отсюда

$$e^{4t}\left(u''+u'\right)e^{-t}+\left[e^{t}\left(u'+u\right)-ue^{t}\right]^{3}=0,$$

$$u''+u'+u'^{3}=0.$$

Полученное уравнение явно не содержит независимой переменной t. Положим

$$u'=p\left(x\right)\quad\left(u''=p\frac{dp}{du}\right).$$

Тогда

$$p\frac{dp}{du}+p+p^{3}=0,$$

откуда

$$\frac{dp}{du}=-1-p^{2},\text{или}\ \ p=0.$$

Из второго уравнения $p=0$ следует $u'=0,\ u=C,$ или $y=Cx.$
Из первого уравнения:

$$\frac{dp}{1+p^{2}}=du,\quad \operatorname{arctg}p=C_{1}-u,\quad p=\operatorname{tg}\left(C_{1}-u\right).$$

Поэтому

$$u'=\operatorname{tg}\left(C_{1}-u\right),\quad \operatorname{ctg}\left(C_{1}-u\right)du=dt,$$

$$\int\operatorname{ctg}\left(C_{1}-u\right)du=t-\ln C\quad\left(C>0\right),$$

$$\ln\left|\sin\left(u-C_{1}\right)\right|=-t+\ln C,$$

$$\sin\left(u-C_{1}\right)=C_{2}e^{-t}\quad\left(C_{2}\neq 0\right),\quad u=C_{1}+\arcsin C_{2}e^{-t}.$$

Учитывая замену

$$y = ux, \quad e^{-t} = \frac{1}{x},$$

Находим

$$y = x\left(C_1 + \arcsin\frac{C_2}{x}\right).$$

Решение $y = Cx$ получается при $C_2 = 0, \quad C_1 = C.$

Ответ: $y = x\left(C_1 + \arcsin\dfrac{C_2}{x}\right)$, $y = Cx.$

9 Проинтегрировать уравнение $x^2yy'' - \left(y - xy'\right)^2 = 0.$

Решение. Левая часть уравнения – однородная функция относительно переменных y, y', y'' с показателем однородности 2:

$$F\left(x, \lambda^t y, \lambda^t y', \lambda^t y''\right) = \lambda^{2t}\left[x^2yy'' - \left(y - xy'\right)^2\right] = \lambda^{2t}F\left(x, y, y', y''\right).$$

Сделаем замену $y' = yu \quad \left(y'' = y\left(u^2 + u'\right)\right)$, где u – новая неизвестная функция. Тогда

$$x^2y^2\left(u^2 + u'\right) - \left(y - xyu\right)^2 = 0, \quad y^2\left[x^2\left(u^2 + u'\right) - \left(1 - xu\right)^2\right] = 0.$$

Функция $y \equiv 0$, очевидно, является решением данного уравнения.
При $y \neq 0$ имеем

$$x^2u^2 + x^2u' - 1 + 2xu - x^2u^2 = 0,$$

откуда для функции *u* получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2}.$$

Общее решение этого уравнения

$$u=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[C_1+\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2}{x}dx}\right]=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}.$$

Согласно произведённой замене имеем

$$y'=yu,\quad y=C_2e^{\int udx},$$

$$y=C_2e^{\int\left(\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx}=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Решение $y\equiv 0$ получается при $C_2=0.$

Ответ: $y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$, $y\equiv 0$.

10 Проинтегрировать уравнение $yy''-\left(y'\right)^2=y'.$

Решение. Очевидным решением уравнения является функция $y=0.$ Разделим левую и правую части уравнения на $y^2\neq 0$:

$$\frac{yy''-\left(y'\right)^2}{y^2}=\frac{y'}{y^2},$$

откуда

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'+\left(\frac{1}{y}\right)'=0,\ \text{или}\ \left(\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}\right)'=0.$$

Таким образом, данное уравнение приведено к уравнению в точных производных. Имеем

$$\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}=C_1,\quad y'-C_1y=-1,$$

откуда при $C_1=0$ получим $y=-x+C.$

При $C_1\neq 0$ имеем линейное неоднородное уравнение первого порядка, общее решение которого

$$y = e^{C_1 x}\left(C_2 - \int e^{-C_1 x}dx\right) = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1} \quad (C_1 \neq 0).$$

Ответ: $y = -x + C$, $y = C_2 e^{C_1 x} + \dfrac{1}{C_1} \quad (C_1 \neq 0)$.

11 Найти решение задачи Коши

$$xy'' - y' - x^2 yy' = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$$

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на $x^2 \neq 0$, приведём его к уравнению в точных производных:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' - \left(\frac{1}{2}y^2\right)' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2\right)' = 0.$$

откуда

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2 = C_1.$$

Учитывая начальные условия, найдём постоянную C_1. Имеем

$$C_1 = \frac{2}{1} - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 2.$$

Тогда

$$\frac{y'}{x} = \frac{1}{2}y^2 + 2, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{y^2+4}{2}, \quad \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}xdx,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}C_2, \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

Находим $C_2 = \operatorname{arctg}0 - 0{,}5 = -0{,}5$.

Поэтому $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $y = 2\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{2}$.

Задания

1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

1	$y''' = x - 2$.	11	$y''' = \sin\ (2x - 1)$.
2	$y''' = e^{3x}$.	12	$y''' = e^{-x}$.
3	$y''' = \cos^{-2} x$.	13	$y^{\mathrm{IV}} = 5$.
4	$y''' = 0$.	14	$y''' = \cos\ (0{,}5x)$.
5	$y''' = \sin 2x$.	15	$y^{\mathrm{IV}} = \cos 2x$.
6	$y^{\mathrm{IV}} = \sin x$.	16	$y^{\mathrm{IV}} = e^{1-x}$.
7	$y^{\mathrm{IV}} = 5x^3$.	17	$y^{\mathrm{IV}} = 5e^x$.
8	$y''' = \cos^2 x$.	18	$y^{\mathrm{IV}} = x - 8$.
9	$y^{\mathrm{IV}} = 2x + 5$.	19	$y''' = x^2 - 2x$.
10	$y''' = \dfrac{6}{x^3}$.	20	$y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{1}{x}$.

2 Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

1	а) $x^2 y'' = (y')^2$;	б) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.
2	а) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;	б) $y'' = 2y'y''$.
3	а) $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$;	б) $(y'')^2 = (y')^2 + 1$.
4	а) $(y'')^3 + xy'' = 2y'$;	б) $y^4 - y^3 y'' = 1$.
5	а) $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$;	б) $(y')^2 - (y')^3 = y''y$.
6	а) $y'' + y' = \sin x$;	б) $(y')^2 + y^2 = 2y''y$.
7	а) $y'' + 4y' = \cos 2x$;	б) $y'' = e^y$.
8	а) $y''x^2 = (y')^2$;	б) $y'(y' + 1) = y''y$.
9	а) $2xy''y' = (y')^2 - 4$;	б) $yy''' + 3y''y = 0$.
10	а) $y'' + 4y' = 2x^2$;	б) $yy''' = 2(y'')^2$.
11	а) $y''(2y' + x) = 1$;	б) $y'' = 2 - y$.
12	а) $y''(e^x + 1) + y' = 0$;	б) $y'' = y^{-3}$.
13	а) $(y'')^2 + y' = xy''$;	б) $y'' = y' + (y')^2$.
14	а) $xy''' = (1 - x)y''$;	б) $(y'')^2 = y'$.
15	а) $y'' = y' + x$;	б) $(y'')^2 - 2yy''' + 1 = 0$.
16	а) $xy'' = y'$;	б) $y''' = (y'')^2$.

17 а) $xy'' - y' = 2x^2 e^x$; б) $y'y'' + 1 = (y')^2$.

18 а) $xy'' = y' + x^2$; б) $(y')^2 + 2yy'' = 1$.

19 а) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$; б) $y^3 y'' = 1$.

20 а) $x(y'' + 1) + y' = 0$; б) $(y')^2 = (3y - 2y')y''$.

3 ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{9}$$

где p и q действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0$$

называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (9). При его решении возможны три случая:

1. Корни k_1 и k_2 действительны и различны. Общее решение при этом имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2. Корни k_1 и k_2 действительны и равны $k_1 = k_2 = k$. Общее решение имеет вид $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3. Корни комплексные $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае общее решение имеет вид $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{10}$$

где p и q – вещественные числа, называется *линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Общее решение уравнения (10) представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Частное решение линейного неоднородного уравнения зависит от вида правой части уравнения, т. е. от функции $f(x)$.

Если $f(x) = P_n(x)$ то частное решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_ч = Q_n(x)x^m,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени;

m – число корней характеристического уравнения равных нулю.

Если $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, то частное решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_ч = Q_n(x)e^{\alpha x}x^m,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени;

m – кратность корня $k = \alpha$ характеристического уравнения.

Если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где a, b, β – известные числа, то частное решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_ч = \left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)x^m,$$

где A, B – неизвестные коэффициенты;

m – число корней характеристического уравнения равных $i\beta$.

Примеры решений типовых задач

1 Найти общее решение уравнения

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$k^2 + 5k + 6 = 0.$$

Его корни $k_1 = -3$ и $k_2 = -2$. Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$.

2 Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^2+5k+6=0$$

имеет равные корни $k_1=k_2=-1$, поэтому общее решение будет иметь вид:

$$y=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right).$$

Выделим из общего решения искомое частное. Для этого подставим начальные данные $x=0$, $y=2$ в общее решение: $y=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)$, откуда $C_1=2$.

Дифференцируя общее решение, получим:

$$y'=-e^{-x}(C_1+C_2x)+e^{-x}C_2,\ y'=e^{-x}\left(C_2-C_1-C_2x\right).$$

В полученное выражение подставляем начальные данные $y'=-3$, $x=0$, найдём, что $-3=C_2-C_1$. Так как $C_1=2$, то $C_2=-1$.

Таким образом, искомое частное решение будет иметь вид:

$$y=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right).$$

Ответ: $y=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)$.

3 Найти общее решение уравнения $y''-y'=x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-k=0$ имеет корни $k_1=0, k_2=1$. Общее решение однородного уравнения тогда имеет вид:

$$y_o=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_2x}=C_1\cdot e^{0\cdot x}+C_2\cdot e^{1\cdot x}=C_1+C_2\cdot e^x.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Так как 0 является корнем характеристического уравнения кратности $m=1$, то частое решение имеет вид:

$$y_ч=\left(Ax+B\right)x=Ax^2+Bx.$$

Найдём y' и y'': $y'=2Ax+B$, $y''=2A$.

Теперь подставим производные в исходное уравнение, получим:

$$2A-2Ax-B=x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A - B = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A = -0,5$, $B = -1$. Тогда общее решение неоднородного уравнения примет вид:

$$y = C_1 + C_2 e^x + x(-0,5x - 1).$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^x + x(-0,5x - 1)$.

4 Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 - 5k - 6 = 0,$$

которое имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения примет вид:

$$y_{o.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения необходимо искать в виде:

$$y_ч = (Ax + B)e^x.$$

Подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$2Ae^x + (Ax + B)e^x - 5\left(Ae^x + (Ax + B)e^x\right) + 6(Ax + B)e^x = 2xe^x;$$

$$2Ae^x + Axe^x + Be^x - 5Ae^x - 5Axe^x - 5Be^x + 6Axe^x + 6Be^x = 2xe^x;$$

$$2A + Ax + B - 5A - 5Ax - 5B + 6Ax + 6B = 2x;$$

$$2Ax - 3A + 2B = 2x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -3A + 2B = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что $A = 1$, $B = 1{,}5$.

Находим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x + 1{,}5\right) e^{x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x + 1{,}5\right) e^{x}$.

5 Найти частное решение уравнения

$$y'' + y = \sin 2x \text{ при } y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{1}{3}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ действительных корней не имеет, так как $k = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_{ч} = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

$$y_{ч}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$y_{ч}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставим y и y'' в исходное уравнение, получим:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \sin 2x,$$

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \sin 2x.$$

Подставляя значения $x = 0$ и $x = 0{,}5\pi$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -3A = 0, \\ -3B = 1. \end{cases}$$

Откуда следует, что $A=0,\ B=-\dfrac{1}{3}$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x.$$

Для того, чтобы найти частное решение исходного уравнения, подставим начальные условия в полученное решение. Имеем:

$$1=C_1\cos 0+C_2\sin 0-\frac{1}{3}\sin 0 \ \Rightarrow\ \ 1=C_1.$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{2}{3}\cos x,$$

$$\frac{1}{3}=-C_1\sin 0+C_2\cos 0-\frac{2}{3}\cos 0\ \Rightarrow\ \ \frac{1}{3}=C_2-\frac{2}{3},\quad C_2=1.$$

Тогда получаем, что

$$y=\cos x+\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x.$$

Ответ: $y=\cos x+\sin x-\dfrac{1}{3}\sin 2x$.

Задания

1 Решить линейные однородные дифференциальные уравнения.

1	$y''+5y'-6y=0$.	11	$y''+9y=0$.
2	$y''-9y=0$.	12	$y''+2y'+5y=0$.
3	$y''+2y'+y=0$.	13	$y''-2y'+y=0$.
4	$y''-y'-2y=0$.	14	$y''-2y'=0$.
5	$y''-6y=0$.	15	$y''+4y=0$.
6	$y''-2y'+10y=0$.	16	$y''+4y'+13y=0$.
7	$y''-5y'+6y=0$.	17	$y''-6y'+9y=0$.
8	$y''-4y'=0$.	18	$4y''-4y'+y=0$.
9	$y''-4y'+20y=0$.	19	$y''-6y'+8y=0$.
10	$y''-10y'+25y=0$.	20	$y''-2y'+2y=0$.

2 Найти общее и частное (при условии $y(0) = y'(0) = 0$) решения дифференциального уравнения второго порядка.

1 $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

2 $y'' + 4y = 3\sin 2x$.

3 $y'' + 2y' + y = e^x$.

4 $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

5 $y'' - 6y = 2x$.

6 $y'' - 2y' + 10y = 2\sin 3x$.

7 $y'' - 2y' + 4y = (x+2)e^{3x}$.

8 $y'' - 6y' + 13y = e^x(x^2 - 5x + 2)$.

9 $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 2\cos x$.

10 $y'' - 2y' - 3y = x^2$.

11 $y'' - y = 4 + x$.

12 $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

13 $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$.

14 $y'' - 4y = 8x^3$.

15 $y'' + 4y = (3x+2)\sin x$.

16 $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x+1)$.

17 $y'' + y' + 2{,}5y = 25\cos 2x$.

18 $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}x^2$.

19 $y'' + 4y = (3x-5)\sin x$.

20 $y'' + y = x^2 + 2x$.

4 ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (11)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – функции от x или постоянные.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным.* Если $f(x) = 0$, то уравнение называют *однородным*; оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (12)$$

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения (12), то его общее решение определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (13)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

В случае, когда коэффициенты уравнения (12) – постоянные величины, уравнение называется *линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.* Общее решение его находят также, как и в случае уравнения второго порядка.

1 Составляют соответствующее характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

2 Вычисляют корни $k_1, k_2, ..., k_n$ этого характеристического уравнения.

3 Выписывают частные линейно независимые решения причём принимая во внимание, что:

а) каждому действительному простому корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

в) каждому действительному корню k кратности μ соответствуют μ линейно независимых частных решений: $e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{\mu-1} e^{kx}$;

г) каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности μ соответствует 2μ частных решений: $e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x$, … , $x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, … , $x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Число частных решений равно степени характеристического уравнения (или порядку данного линейного дифференциального уравнения).

4 Получают общее решение по формуле (13), в которой $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимые решения.

Примеры решений типовых задач

1 Решить дифференциальное уравнение

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Составляем соответствующее ему характеристическое уравнение

$$k^3 + 3k^2 - k - 3 = 0.$$

Разлагая левую часть характеристического уравнения на множители, находим

$$k^3 + 3k^2 - k - 3 = k^2(k+3) - (k+3) = (k+3)(k-1)(k+1).$$

Характеристическое уравнение принимает вид:

$$(k+3)(k-1)(k+1) = 0.$$

Оно имеет различные действительные корни: $k_1 = -3, k_2 = -1, k_3 = -3$, которым соответствуют линейно независимые решения:

$$y_1 = e^{-3x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{x}.$$

В соответствии с формулой (13) получаем общее решение

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + C_3e^{x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + C_3e^{x}$.

2 Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)}+y'''-3y''-5y'-2y=0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^4+k^3-3k^2-5k-2=0.$$

Поскольку

$$k^4+k^3-3k^2-5k-2=k^3(k+1)-3k(k+1)-2(k+1)=$$

$$=(k+1)(k^3-3k-2)=(k+1)^2(k^2-k-2)=(k+1)^3(k-2),$$

то характеристическое уравнение имеет корни: $k_1=k_2=k_3=-1, k_4=2$.

Корень $k=-1$ является трехкратным, ему соответствуют линейно независимые решения:

$$y_1=e^{-x}, y_2=xe^{-x}, y_3=x^2e^{-x}.$$

Простому корню $k=2$ соответствует решение $y_4=e^{2x}$, поэтому общее решение определяется формулой

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}+C_4e^{2x}$$

или

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}+C_4e^{2x} .$$

Ответ: $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}+C_4e^{2x}$.

3 Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)}+4y'''+7y''-4y'-8y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4+4k^3+7k^2-4k-8=0.$$

Так как

$$k^4+4k^3+7k^2-4k-8=k^4+4k^3+8k^2-k^2-4k-8=$$

$$=k^2(k^2-1)+4k(k^2-1)+8(k^2-1)=(k^2-1)(k^2+4k+8),$$

то это уравнение имеет корни: $k_1=-1, k_2=1, k_3=-2-2i, k_4=-2+2i.$ Действительным корням k_1 и k_2 соответствуют решения

$$y_1=e^{-x}, y_2=e^x,$$

а комплексно-сопряженным – решения

$$y_3=e^{-2x}\cos 2x,\; y_4=e^{-2x}\sin 2x$$

В соответствии с формулой (13) получаем общее решение:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{-2x}\cos 2x+C_4e^{-2x}\sin 2x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)e^{-2x}.$

4 Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(6)}+3y^{(4)}+3y''+y=0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^6+3k^4+3k^2+1=0.$$

Поскольку

$$k^6+3k^4+3k^2+1=(k^2+1)^3,$$

то характеристическое уравнение имеет корни: $k_1=i, k_2=-i$.

Трёхкратным мнимым сопряжённым корням i и $-i$ соответствуют линейно независимые решения:

$$y_1=\cos x,\; y_2=x\cos x,\; y_3=x^2\cos x,\; y_4=\sin x,\; y_5=x\sin x,\; y_6=x^2\sin x.$$

Следовательно, общее решение определяется формулой

$$y = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3 x^2\cos x + C_4\sin x + C_5 x\sin x + C_6 x^2\sin x.$$

Ответ: $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x + C_6 x^2\right)\sin x.$

Задания

1 Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1	$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$	11	$y''' + 2y'' - 9y' - 18y = 0.$
2	$y''' + y'' - 4y' - 4y = 0.$	12	$y''' - 5y'' - y' + 5y = 0.$
3	$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0.$	13	$y''' - 3y' - 2y = 0.$
4	$y''' - y'' + y' - y = 0.$	14	$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$
5	$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$	15	$y''' + 5y'' + 19y' - 25y = 0.$
6	$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0.$	16	$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$
7	$y^{IV} - 10y'' + 9y = 0.$	17	$y^{IV} + 2y''' - y'' - 2y' = 0.$
8	$y^{IV} - 2y''' - y'' + 2y' = 0.$	18	$y^{IV} - 2y'' + y = 0.$
9	$y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0.$	19	$y^{IV} - 2y'' + y = 0.$
10	$y^{IV} - 16y = 0.$	20	$y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0.$

5 ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (11) и соответствующее ему однородное уравнение (12). Общее решение линейного неоднородного уравнения (11) определяется формулой

$$y = y_0 + y_ч, \tag{15}$$

где y_0 – общее решение однородного уравнения;

$y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения можно находить *методом вариации произвольных постоянных.*

Пусть соответствующее однородное уравнение (12) имеет общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_n y_n. \tag{16}$$

Общее решение неоднородного уравнения (11) будем искать в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots C_n(x) y_n(x).$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – неизвестные функции.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots C_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

находим $C_k' = \varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а потом и сами функции. Определитель этой системы отличен от нуля, как определитель Вронского для линейно-независимых функций, поэтому система имеет единственное решение.

В простейших случаях частные решения неоднородного уравнения (11) определяют *методом неопределённых коэффициентов*. Они напрямую зависят от вида функции $f(x)$:

1 $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Если a не является корнем соответствующего характеристического уравнения, то полагают $y_ч = e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами. Если a – корень характеристического уравнения, то

$$y_ч = x^r e^{ax} Q_n(x), \tag{18}$$

где r – кратность корня a.

2 $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx\right]$.

Если $a \pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения, то полагают

$$y_ч = Q_v(x)e^{ax}\cos bx + S_v(x)e^{ax}\sin bx, \tag{19}$$

где $Q_v(x)$, $S_v(x)$ – многочлены степени $v=\max\{n,m\}$ с неопределёнными коэффициентами.

Если $a \pm ib$ – корни характеристического уравнения, то

$$y_ч = x^r\left(Q_v(x)e^{ax}\cos bx + S_v(x)e^{ax}\sin bx\right), \tag{20}$$

где r – кратность корней $a \pm ib$.

Примеры решений типовых задач

1 Проинтегрировать линейное неоднородное уравнение

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - x^2 - 4x + 13.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}.$$

Найдём частное решение исходного уравнения двумя способами.

1-й способ (Метод вариации произвольных постоянных)
Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{2x}.$$

Неизвестные функции $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} + C_3'(x)e^{2x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} + 2C_3'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} + 4C_3'(x)e^{2x} = 2x^3 - x^2 - 4x + 13. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} C_1'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{13}{6}\right)e^{x}, \\ C_2'(x) = \left(-x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{13}{2}\right)e^{-x}, \\ C_3'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{13}{3}\right)e^{-2x}. \end{cases}$$

Теперь найдём искомые функции, интегрируя данные равенства по частям несколько раз.

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}\right)e^{x} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx = \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{19}{2}\right)e^{-x} + C_2,$$

$$C_3(x) = \int C_3'(x)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2\right)e^{-2x} + C_3.$$

Исходное уравнение имеет решение

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{2x} =$$

$$= C_1 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{2} + C_2 e^{x} + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{19}{2} +$$

$$+ C_3 e^{2x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + x^3 + x^2 + 5x + 8.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + x^3 + x^2 + 5x + 8.$

2-й способ (Метод неопределённых коэффициентов)

Найдём частное решение исходного уравнения, правая часть которого является многочленом третьей степени и в случае $n = 3$ и $\alpha = 0$ принимает вид

$$P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 13.$$

В соответствии с первым случаем полагаем

$$y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Поскольку

$$y_ч' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ y_ч'' = 6Ax + 2B,\ y_ч''' = 6A,$$

то

$$6A - 2(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$$

$$= 2x^3 - x^2 - 4x + 13.$$

или

$$2Ax^3 + (2B - 3A)x^2 + (2C - 2B - 12A)x +$$

$$+ (2D - C - 4B + 6A) = 2x^3 - x^2 - 4x + 13.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2A&=2,\\ 2B-3A&=-1,\\ 2C-2B-12A&=-4,\\ 2D-C-4B+6A&=13.\end{aligned}\right\}$$

Из которой находим: $A=1,\ B=1,\ C=5,\ D=8$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y_1=x^3+x^2+5x+8.$$

По формуле (15) получаем общее решение:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}+x^3+x^2+5x+8.$$

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}+x^3+x^2+5x+8.$

2 Проинтегрировать линейное неоднородное уравнение

$$y^{\mathrm{IV}}-2y''+y=(48x-24)e^x.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y^{\mathrm{IV}}-2y''+y=0$$

имеет общее решение

$$y_0=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x},$$

поскольку $k_1=k_2=-1, k_3=k_4=1$ – корни характеристического уравнения: правая часть данного уравнения является функцией вида (1), причём $n = 1$; $k = 1$ – двукратный корень характеристического уравнения.

В соответствии с формулой полагаем

$$y_ч=x^2(Ax+B)e^x=(Ax^3+Bx^2)e^x.$$

Находим производные функции y_1:

$$y_ч' = \left[Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx\right]e^x,$$

$$y_ч'' = \left[Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B\right]e^x,$$

$$y_ч''' = \left[Ax^3 + (9A+B)x^2 + (18A+6B)x + (6A+6B)\right]e^x,$$

$$y_ч^{(4)} = \left[Ax^3 + (12A+B)x^2 + (36A+8B)x + (24A+12B)\right]e^x.$$

Подставим выражения $y_ч', y_ч'', y_ч''', y_ч^{(4)}$ в данное уравнение:

$$\left[Ax^3 + (12A+B)x^2 + (36A+8B)x + (24A+12B)\right]e^x -$$

$$-2\left[Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B\right]e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x =$$

$$= (48x - 24)e^x.$$

Сокращая на e^x и приводя подобные члены, получаем тождество

$$24Ax + (24A + 8B) = 48x - 24$$

из которого следует, что

$$24A = 48\ ;\ 24A + 8B = -24, \text{ т. е. } A = 2,\ B = -9.$$

Следовательно, частное решение определяется формулой

$$y_ч = (2x^3 - 9x^2)e^x.$$

Общее решение в соответствии имеет вид

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x} + (2x^3 - 9x^2)e^x.$$

3 Проинтегрировать уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} - 16y = 4\cos 2x - 8\sin 2x.$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{IV}-16y=0$$

определяется формулой

$$y_0=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Правая часть данного уравнения является функцией вида 2, где $a=4,\ b=-8,\ \beta=2,$ причём $\beta i=2i$ – простой корень характеристического уравнения

$$k^4-16=0 \text{ или } (k^2-4)(k^2+4)=0.$$

В соответствии с формулой (20) полагаем $y_ч=x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$.
Находим производные функции $y_ч$:

$$y_ч'=A\cos 2x+B\sin 2x+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x),$$

$$y_ч''=-4A\sin 2x+4B\cos 2x+x\left(-4A\cos 2x-4B\sin 2x\right),$$

$$y_ч'''=-12A\cos 2x-12B\sin 2x+x\left(8A\sin 2x-8B\cos 2x\right),$$

$$y_ч^{(4)}=32A\sin 2x-32B\cos 2x+x\left(16A\cos 2x+16B\sin 2x\right).$$

Подставим выражения для $y_ч^{(4)}$ и $y_ч$ в исходное уравнение:

$$32A\sin 2x-32B\cos 2x+x\left(16A\cos 2x+16B\sin 2x\right)-$$

$$-16x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)=4\cos 2x-8\sin 2x.$$

Приводя подобные члены, получаем

$$32A\sin 2x-32B\cos 2x=4\cos 2x-8\sin 2x,$$

Откуда

$$32A=-8;\ 32B=4, \text{ т. е. } A=-\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{8}.$$

Следовательно, частное решение определяется формулой

$$y_1 = -x\left(\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right).$$

Тогда общее решение исходного уравнения определяется формулой

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - x\left(\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right).$$

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - x\left(\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right)$.

Задания

1 Найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

1 $y''' + 3y'' - y' - 3y = 3x - 14.$

2 $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2x^2 + 4.$

3 $y''' + y'' - 4y' - 4y = 4x^2 + 8x - 10.$

4 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15.$

5 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 2\cos x + 8\sin x.$

6 $y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 18e^x.$

7 $y^{IV} - 16y = 64\cos 2x + 32\sin 2x.$

8 $y^{IV} + 4y''' + 7y'' - 4y' - 8y = e^{-x} + e^x + \cos 2x + \sin 2x.$

9 $y^{V} - 5y''' + 5y' = e^{-x} + x^2 - 3.$

10 $y^{VII} - y^{VI} + 3y^{V} - 3y^{IV} + 3y''' - 3y'' + y' - y = e^x.$

11 $y''' + 5y'' + 19y' - 25y = 25x + 6.$

12 $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 36x^2 - 14.$

13 $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 26x^2 + 10x - 17.$

14 $y''' + y'' - 5y' + 3y = 97\cos 4x - 71\sin 4x.$

15 $y''' - 5y'' + 8y' - 6y = 12e^{2x}.$

16 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x}.$

17 $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 48e^x.$

18 $y^{V} - y^{IV} - 81y' + 81y = e^x + \cos 3x + \sin 3x.$

19 $y^{VI} + 3y^{IV} + 3y'' + y = \cos x - \sin x.$

20 $y^{VIII} + 4y^{VI} + 6y^{IV} + 4y'' + y = \cos x + \sin x.$

6 УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Уравнение Эйлера является линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами, которое имеет вид

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x),$$

где все a_i $(i=1,\ldots,n)$, а также a и b – вещественные числа, а правая часть $f(x)$ – функция независимой переменной x, и по этой переменной вычислены все производные неизвестной функции $y(x)$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение Эйлера называют *однородным*.

В частном случае, когда $a=1,\ b=0$, уравнение Эйлера принимает вид

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

Если ввести замену независимой переменной по формуле

$$ax+b=e^t,$$

То уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Из последней формулы следует:

$$y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y''' = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right),$$

………………………………..

Примеры решений типовых задач

1 Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0.$$

Решение. Это однородное уравнение Эйлера. Проведем замену переменной $x = e^t$ и получим

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt};\; y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляя эти значения производных в заданное уравнение и замечая, что $x^2 = e^{2t}$, получаем

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 5e^te^{-t}\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Сделанная подстановка привела нас к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4k + 3 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -3,\ k_2 = -1$ – действительные различные числа, поэтому общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t}.$$

Возвращаемся к старой переменной с учётом, что $t = \ln x$. Тогда общее решение исходного уравнения

$$y = C_1e^{-3\ln x} + C_2e^{-\ln x} = \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x}.$$

Ответ: $y = \dfrac{C_1}{x^3} + \dfrac{C_2}{x}$.

2 Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + 4xy' + 12y = \ln x.$$

Решение. Это неоднородное уравнение Эйлера. Проведём замену переменной $x = e^t$ и получим

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt};\; y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляя эти значения производных в заданное уравнение, замечая, что $x^2 = e^{2t}$, получаем

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 4e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} + 12y = \ln e^t.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = t.$$

Сделанная подстановка привела нас к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 3k + 12 = 0.$$

Его корни: $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2}i$ – комплексно-сопряжённые числа, поэтому общее решение однородного уравнения, соответствующего данному, имеет вид

$$y_0 = C_1e^{-1,5t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + C_2e^{-1,5t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t.$$

Теперь отыщем частное решение. Поскольку число $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{39}}{2}i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y_ч = At + B.$$

Подставляя его в неоднородное уравнение, получим равенство для поиска неизвестных коэффициентов:

$$t = 12At + 12B + 3A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы t в левой и правой частях данного равенства, получим

$$\begin{cases} 12A = 1, \\ 12B + 3A = 0. \end{cases}$$

Откуда $A = \frac{1}{12}$; $B = -\frac{1}{48}$. Таким образом, частное решение имеет вид

$$y_ч = \frac{1}{12}t - \frac{1}{48}.$$

Складывая это частное решение с общим решением соответствующего однородного уравнения, получим общее решение

$$y = C_1 e^{-1,5t} \cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + C_2 e^{-1,5t} \sin\frac{\sqrt{39}}{2}t + \frac{1}{12}t - \frac{1}{48}.$$

Теперь возвращаемся к старой переменной с учётом, что $t = \ln x$. Получаем окончательно общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 x^{-1,5} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right) + C_2 x^{-1,5} \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right) + \frac{1}{12}\ln x - \frac{1}{48}.$$

Ответ: $y = C_1 x^{-1,5} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right) + C_2 x^{-1,5} \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right) + \frac{1}{12}\ln x - \frac{1}{48}$.

Задания

1 Найти общее решения уравнений Эйлера.

1 $x^2 y'' + xy' + 9y = 0.$

2 $x^2 y'' + xy' - 9y = 0.$

3 $x^2 y'' + xy' = 0.$

4 $x^2 y'' - xy' + y = 0.$

5 $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 0.$

6 $(3x+1)^2 y'' - 2(3x+1)y' - 12y = 0.$

7 $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' - 12y = 0.$

8 $(x+5)^2 y'' - 3(x+5)y' + 4y = 0.$

9 $x^3 y''' - 6x^2 y'' + 18xy' - 24y = 0.$

10 $x^4 y^{(4)} - x^3 y''' + 3x^2 y'' - 6xy' + 6y = 0.$

11 $x^2 y'' + xy' - y = 9x^2.$

12 $x^2 y'' - xy' + y = 3x^3.$

13 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 5x.$

14 $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' - 12y = 3x + 1.$

15 $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3.$

16 $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

17 $x^3 y'' - 2xy' = 6\ln x.$

18 $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x).$

19 $x^2 y'' - xy' + y = 6x^3.$

20 $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3.$

ЛИТЕРАТУРА

1 Альсевич, Л. А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л. А. Альсевич, С. А. Мазаник, Л. П. Черенкова. – Минск : БГУ, 2000. – 311 с.

2 Богданов, Ю. С. Дифференциальные уравнения / Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид. – Минск : Унiверсiтэцкае, 1996. – 287 с.

3 Богданов, Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям / Ю. С. Богданов. – Минск : Унiверсiтэцкае, 1977. – 240 с.

4 Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.

5 Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – 7-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.

6 Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.

7 Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 236 с.

8 Шилин, А. П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры / А. П. Шилин. – Минск : РИВШ, 2008. – 368 с.

Производственно-практическое издание

Немилостивая Виолетта Анатольевна,
Парукевич Ирина Викторовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Практическое пособие

Редактор Е. С. Балашова
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 28.01.2025. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,05.
Тираж 10 экз. Заказ 48.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.