Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. А. НЕМИЛОСТИВАЯ, И. В. ПАРУКЕВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Практическое пособие

для студентов
специальностей 6-05-0533-01 «Физика»,
6-0533-02 «Прикладная физика», 6-0533-04-02 «Компьютерная физика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2025

УДК 517.953(076)
ББК 22.161.614я73
Н502

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук Л. П. Авдашкова,
кандидат физико-математических наук В. Е. Евдокимович

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Немилостивая, В. А.
Н502 Дифференциальные уравнения первого порядка : практическое пособие / В. А. Немилостивая, И. В. Парукевич ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2025. – 47 с.
ISBN 978-985-32-0075-1

Практическое пособие разработано в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Физика», «Прикладная физика», «Компьютерная физика». В издании содержится материал по разделу «Дифференциальные уравнения первого порядка».

Адресовано студентам специальностей 6-05-0533-01 «Физика», 6-0533-02 «Прикладная физика», 6-0533-04-02 «Компьютерная физика».

УДК 517.953(076)
ББК 22.161.614я73

ISBN 978-985-32-0075-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие………………………………………………………………. 4
1 Введение в дифференциальные уравнения……………………… 5
2 Уравнения с разделяющимися переменными……………………... 6
3 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка…… 10
4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка……… 15
5 Уравнения в полных дифференциалах…………………………... 24
6 Интегрирующий множитель……………………………………... 29
7 Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной……………………………………………………………. 34
Ответы к заданиям……………………………………………….. 42
Литература…………………………………………………………... 47

ПРЕДИСЛОВИЕ

В практическом пособии рассмотрена тема «Дифференциальные уравнения первого порядка», которая является математической основой общей физики. При изучении физических явлений часто не удаётся непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие физическое явление, но в тоже время легко устанавливается зависимость между теми же величинами и их производными или дифференциалами. Дифференциальные уравнения являются математическими моделями задач, возникающих в физике и технических дисциплинах. Но качественное усвоение этой дисциплины, как и многих других математических дисциплин, невозможно без удобного дидактического инструмента. Именно поэтому основной целью данного пособия является создание удобного в использовании дидактического модуля, позволяющего, с одной стороны, обеспечить преподавателю высокий методический уровень проведения практических занятий, а с другой стороны, оказать помощь студентам в усвоении теоретического и практического материала путем самостоятельного решения задач.

В каждой теме содержится необходимый теоретический материал и типовые примеры, иллюстрирующие основные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка. Подбор задач осуществлён в соответствии с расположением учебного материала в программе дисциплины. В пособие включено большое количество вариантов заданий для аудиторной и самостоятельной работы, что позволяет осуществить индивидуальный подход при изучении раздела «Дифференциальные уравнения первого порядка».

1 ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. Если искомая функция зависит от одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-го порядка в общем виде можно записать так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где x – независимая переменная;

$y = y(x)$ – искомая функция переменной x;

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – ее производные;

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$ – заданная функция своих аргументов.

Отметим, что функция F может не содержать некоторых своих аргументов, но непременно должна зависеть от $y^{(n)}$ (когда речь идёт об уравнении n-го порядка).

Порядком ОДУ называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{1}$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением в нормальной форме.

Решением уравнения (2) называется всякая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. Кривая, определяемая решением уравнения (1) или (2), называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения и представляет собой гладкую кривую, касательные к которой в каждой точке совпадают с соответствующей касательной из поля касательных, задаваемых этим уравнением.

Общим решением дифференциального уравнения (1) или (2) называются соотношения вида

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } y = \varphi(x, C),$$

включающие одну произвольную постоянную величину и обладающую тем свойством, что, решая их относительно y при любых частных значениях произвольной постоянной, получаем функции вида $y = \varphi(x)$, являющиеся решениями уравнения (1) или (2).

Частным решением дифференциального уравнения (1) или (2) называется такое решение, которое получается из общего решения при некотором значении произвольной постоянной.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка заключается в следующем: найти решение $y = y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ или } y\left(x_0\right) = y_0, \tag{3}$$

где x_0, y_0 – заданные числа.

Если известно общее решение $y = \varphi(x, C)$ дифференциального уравнения первого порядка или его общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$, то нахождение решения задачи Коши сводится к вычислению значения произвольной постоянной C из уравнения $y_0 = \varphi\left(x_0, C\right)$ или уравнения $\Phi\left(x_0, y_0, C\right) = 0.$

Решение дифференциального уравнения первого порядка, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, включая $\pm\infty$, называется его *особым решением.*

2 УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Будем считать, что дифференциальное уравнение первого порядка задано в виде

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0.$$

Рассмотрим частный случай, а именно, когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ представляют собой произведения функции только от x на функцию только от y, т. е.

$$P(x, y) = f(x)\varphi(y), Q(x, y) = f_1(x)\varphi_1(y),$$

в этом случае уравнение принимает вид

$$f(x)\varphi(y)dx+f_1(x)\varphi_1(y)dy=0. \qquad (4)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно привести к виду (4), где $f(x),\ f_1(x)$ – непрерывные функции только от x, $\varphi(y),\varphi_1(y)$ – непрерывные функции только от y.

Разделив почленно это уравнение на $f_1(x)\varphi(y)$ в предположении, что

$$f_1(x)\varphi(y)\neq 0$$

получим уравнение

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx+\frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется *уравнением с разделёнными переменными*: при dx находится функция только от x, при dy – только от y.

Взяв неопределённые интегралы от обеих частей уравнения, получим

$$\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy=C. \qquad (6)$$

Равенством (6) выражается общий интеграл уравнения (4). Уравнение (4) считается решённым. Говорят, что решение найдено «в квадратурах».

Примеры решений типовых задач

1 Найти общий интеграл уравнения

$$\sqrt{3+y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,ydy=0.$$

Решение. Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\sqrt{1-x^2}\,ydy=-\sqrt{3+y^2}\,dx,$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}}=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{d\left(3+y^2\right)}{2\sqrt{3+y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{3+y^2} = -\arcsin x + C.$$

Ответ: общий интеграл $\arcsin x + \sqrt{3+y^2} = C$, где $C = \text{const}$.

2 Найти частное решение дифференциального уравнения

$$2y'\sin y \cos y \sin^2 x + \cos x = 0, \quad y\left(0{,}5\pi\right) = 0.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные:

$$2\frac{dy}{dx}\sin y \cos y \sin^2 x = -\cos x,$$

$$2\sin y \cos y dy = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x},$$

$$\sin 2y dy = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

Интегрируем:

$$\int \sin 2y dy = -\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x},$$

$$\frac{1}{2}\int \sin 2y d(2y) = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}.$$

Общее решение $-\frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{\sin x} + C$.

Найдём частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0{,}5\pi) = 0$. Подставляем его в общее решение:

$$-\frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{\sin(0{,}5\pi)} + C,$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{1}+C,$$

$$-\frac{1}{2}=1+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\cos 2y=\frac{1}{\sin x}-\frac{3}{2}.$

3 Решить уравнение $(1+y)dx+(1-x)dy=0$.

Решение. Разделим переменные

$$-\frac{dx}{1-x}+\frac{dy}{1+y}=0,\ \frac{dx}{x-1}+\frac{dy}{1+y}=0.$$

Интегрируя, получим общее решение:

$$\ln|x-1|+\ln|y+1|=C,\ \ln|y+1|=\ln|C|-\ln|x-1|.$$

Используя, свойство логарифмов получим:

$$\ln|y+1|=\ln\left|\frac{C}{x-1}\right|,\ y+1=\frac{C}{x-1}.$$

Ответ: $y=\frac{C}{x-1}-1.$

Задание

1 Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1 $4xdx-3ydy = 3x^2ydy-2xy^2dx.$

2 $2x\sqrt{1-y^2}dx+ydy = 0.$

3 $6xdx-6ydy = 2x^2ydy-3xy^2dx.$

4 $x\left(1+y^2\right)+yy'\left(1+x^2\right) = 0.$

5 $\sqrt{3+y^2}dx-ydy = x^2ydy.$

6 $\left(y^2+xy^2\right)+\left(x^2-yx^2\right)y' = 0.$

11 $y\left(4+e^x\right)dy-e^xdx = 0.$

12 $\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x = 0.$

13 $y'\operatorname{tg}x-y = 1.$

14 $x\sqrt{4-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$

15 $\left(e^x+8\right)dy-ye^xdx = 0.$

16 $y\ln y+xy' = 0.$

7 $\left(e^{3x}+7\right)dy+ye^{3x}dx = 0.$

8 $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1 = 0.$

9 $y' = 5\sqrt{y}.$

10 $y' = e^{x-y}.$

17 $y'+y^2 = 1.$

18 $e^y\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) = 1.$

19 $\left(1+e^x\right)y' = ye^x.$

20 $y' = 10^{y+x}.$

3 ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Функция $F(x,y)$ называется *однородной измерения* n, если при любом t выполняется тождество

$$F(tx,ty)=t^nF(x,y). \tag{7}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0. \tag{8}$$

называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения n.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *однородным*, если $f(x,y)$ однородная функция измерения нуль.

Замена

$$u=\frac{y}{x} \text{ или } y=ux \tag{9}$$

приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными x, u; из него определятся u, а из формулы (9) – искомая функция y.

Уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right) \tag{10}$$

приводится к однородному с помощью замены: $u=x-x_0$, $v=y-y_0$, где (x_0,y_0) находятся из системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если же $\Delta = 0$, то уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = a_1x + b_1y$.

Примеры решений типовых задач

1 Решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Решение. Правая часть уравнения – однородная функция нулевого измерения, поэтому данное уравнения однородное. Введем новую переменную u по формуле $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$. Имеем

$$u'x + u = e^u + u,$$

$$x du = e^u dx.$$

Делим обе части уравнения на x и на e^u

$$\frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{du}{e^u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{e^u} = C - \ln x.$$

Обратная замена

$$e^{-\frac{y}{x}} = C - \ln x .$$

Ответ: $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$.

2 Решить дифференциальное уравнение

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0 .$$

Решение. Убедимся в однородности уравнения. Так как

$$P(x,y) = x - y\cos\frac{y}{x};\ P(tx,ty) = tx - ty\cos\frac{ty}{tx} = tP(x,y),$$

$$Q(x,y) = x\cos\frac{y}{x};\ Q(tx,ty) = tx\cos\frac{ty}{tx} = tQ(x,y),$$

то функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции первого измерения. Введем новую переменную u по формуле $y = ux$, тогда $dy = xdu + udx$. Имеем

$$(x - ux\cos u)dx + x\cos u(xdu + udx) = 0,$$

$$dx + x\cos u du = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = -\cos u du .$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\cos u du,\ \ln|x| + \sin u = C .$$

Значит, $\ln|x| + \sin\frac{y}{x} = C$ – общее решение.

Ответ: $\ln|x| + \sin\frac{y}{x} = C$.

3 Решить ДУ

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}.$$

Решение.

$$\begin{cases} x+2y+1=0, \\ 2x+y-1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+1=0, \\ 3x+3y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+2y+1=0, \\ x=-y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

Замена: $u=x-1, v=y+1$, тогда $du=dx, dv=dy$. Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+2v}{2u+v} \quad \text{или} \quad (2u+v)dv-(u+2v)du=0\,.$$

Данное уравнение является однородным, поэтому введём новую переменную $w=\dfrac{v}{u} \Rightarrow v=uw, dv=udw+wdu$.

Тогда

$$(2u+uw)(udw+wdu)-(u+2uw)du=0,$$

$$(2+w)udw+(2w+w^2-1-2w)du=0,$$

$$(2+w)udw+\left(w^2-1\right)du=0,$$

$$\frac{2+w}{1-w^2}dw=\frac{du}{u},$$

$$\int\frac{2+w}{1-w^2}dw=\int\frac{du}{u},$$

$$\ln\left|\frac{w+1}{w-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-w^2\right|=\ln|u|+\ln C,$$

$$\ln\left|\frac{w+1}{w-1}\right|=\ln Cu\sqrt{\left|1-w^2\right|},$$

$$\frac{w+1}{w-1}=Cu\sqrt{1-w^2},$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2=C^2u^2\left(1-w^2\right),$$

$$w+1=C^2u^2(1-w)^3.$$

Вернёмся к старым переменным u,v:

$$\frac{v}{u}+1=C^2u^2\left(1-\frac{v}{u}\right)^3,$$

$$v+u=C^2(u-v)^3.$$

Подставляя в полученное равенство выражения для $u,v,$ находим общий интеграл исходного уравнения:

$$y+1+x-1=C^2(x-1-y-1)^3,$$

$$y+x=C^2(x-y-2)^3.$$

Задание

1 Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

1 $(x+2y)dx-x\,dy = 0.$

2 $(x-y)dx+(x+y)dy = 0.$

3 $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2\,dy = 0.$

4 $2x^3y' = y\left(2x^2-y^2\right).$

5 $y^2+x^2y' = xyy'.$

6 $\left(x^2+y^2\right)y' = 2xy.$

7 $xy'-y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$

8 $xy' = y-xe^{\frac{y}{x}}.$

9 $xy'-y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$

10 $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$

11 $\left(y+\sqrt{xy}\right)dy = xdy.$

12 $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y.$

13 $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy = 0.$

14 $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy = 0.$

15 $x-y-1+(y-x+2)y' = 0.$

16 $(x+4y)y' = 2x+3y-5.$

17 $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

18 $(y+2)dx = (2x+y-4)dy.$

19 $\left(y'+1\right)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$

20 $y' = \frac{y-2x}{x+1}+\operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}.$

4 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{11}$$

где $y = y(x)$ – искомая функция;

$a(x), b(x), c(x)$ – заданные функции.

Будем считать, что они непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $a(x) \neq 0$. Поскольку $a(x) \neq 0$ при любом $x \in [\alpha, \beta]$, то данное уравнение можно переписать так:

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{12}$$

Существуют несколько методов решения этого уравнения.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Рассмотрим случай, когда $f(x) \equiv 0$, тогда уравнение (12) принимает вид:

$$y' + p(x)y = 0$$

и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением*.

Его решения имеют вид $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Рассмотрим общий случай, когда $f(x) \neq 0$, тогда решение будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(t)dt}.$$

То есть в таком же виде, в котором мы нашли общее решение однородного уравнения, считая C не постоянной, а функцией. Это не нарушает общности рассуждений, так как любую функцию $y(x)$ можно записать в этом виде. Подставим предполагаемое решение в (12). Получим уравнение

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(t)dt}.$$

Отсюда

$$C(x) = \int f(s) e^{\int p(t)dt} ds + C_0 .$$

Тогда формула

$$y = \left(\int f(s) e^{\int p(t)dt} ds + C_0 \right) e^{-\int p(t)dt} \tag{13}$$

задаёт общее решение ДУ (12).

Метод Бернулли

Решение уравнения (12) будем искать в виде произведения двух функций $v = v(x), u = u(x)$

$$y = uv. \tag{14}$$

Так как $y' = u'v + uv'$, то подстановка выражений для y и y' в уравнение (12) приводит его к виду

$$u'v + u\left[v' + p(x)v\right] = f(x). \tag{15}$$

В качестве v выберем одну из функций, обращающих в нуль сумму в квадратных скобках, т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$v' + p(x)v = 0. \tag{16}$$

С учётом (16) уравнение (15) принимает вид

$$u'v = f(x). \tag{17}$$

Уравнение (16) является уравнением с разделяющимися переменными x и v, из него определяется функция $v = v(x)$. Функция $u = u(x)$ определяется из уравнения (17), которое при $v = v(x)$ также является уравнением с разделяющимися переменными. Определив $u = u(x)$ и $v = v(x)$, по формуле (14) найдем y.

В частности, для *уравнения Бернулли*

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

замена $z = y^{1-n}$ приводит к линейному уравнению.

Примеры решений типовых задач

1 Решить методом Бернулли дифференциальное уравнение

$$y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену:

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u\left(v' + v\operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos x}.$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' + v\operatorname{tg} x = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдём функцию v:

$$\frac{dv}{dx} = -v\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x},$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|.$$

Функцию $v=\cos x$ – подставим во второе уравнение системы:

$$u'\cdot\cos x=\frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$u=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C.$$

Таким образом: $y=uv=(\operatorname{tg}x+C)\cos x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+C\right)\cos x.$

Ответ: $y=C\cos x+\sin x,$ где $C=\text{const}.$

2 Найти решение задачи Коши:

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ y(0)=\frac{1}{2}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным, замена:

$$y=uv\Rightarrow y'=u'v+uv'.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$u'v+uv'-\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3,$$

$$u'v+\left(v'-\frac{2v}{x+1}\right)u=(x+1)^3.$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases}v'-\dfrac{2v}{x+1}=0,\\ u'v=(x+1)^3.\end{cases}$$

Из первого уравнения найдём v:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x+1},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|,$$

$$v = (x+1)^2.$$

И подставим во второе уравнение системы:

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3,$$

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

$$u = \int (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Общее решение:

$$y = uv = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right] \cdot (x+1)^2 = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2},$$

где $C = \text{const}$.

Найдём частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(0) = C + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0.$$

Ответ: $y = \dfrac{(x+1)^4}{2}$.

3 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = 2x\left(x^2 + y\right).$$

Решение. Приведём уравнение к виду (12):

$$y' = 2x^3 + 2xy,$$

$$y' - 2xy = 2x^3.$$

Обнулим правую часть и решим вспомогательное уравнение:

$$y^{t} - 2xy = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy,$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int xdx,$$

$$\ln|y| = x^2 + C^*.$$

Общее решение вспомогательного уравнения:

$$y = e^{x^2 + C^*} = \tilde{C}e^{x^2}, \text{ где } \tilde{C} = \text{const}.$$

Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{x^2}.$$

Подставив это выражение в заданное уравнение, получим:

$$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 2x^3.$$

Два слагаемых в левой части взаимно уничтожаются, тогда

$$C'(x)e^{x^2} = 2x^3,$$

$$\frac{dC}{dx} = 2x^3e^{-x^2},$$

$$\int dC = 2\int x^3e^{-x^2}dx,$$

$$C(x) = 2\int x^3e^{-x^2}dx. \tag{18}$$

Интегрируем по частям по формуле:

$$\int adb = ab - \int bda,$$

где

$$a = x^2 \Rightarrow da = 2xdx,$$

$$db = 2xe^{-x^2}dx \Rightarrow b = 2\int xe^{-x^2}dx = -\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -e^{-x^2}.$$

Тогда формула (18) принимает вид

$$C\left(x\right) = -x^2e^{-x^2} + 2\int xe^{-x^2}dx = -x^2e^{-x^2} - \int e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

В итоге:

$$C(x) = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

Таким образом, решения исходного уравнения имеют вид

$$y = \left(-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C\right)e^{x^2} = Ce^{x^2} - x^2 - 1.$$

Ответ: $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$, где $C = \text{const}$.

4 Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданному начальному условию.

$$y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0,\ y(1) = e.$$

Решение. Данное ДУ является линейным неоднородным. Решим вспомогательное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|\tilde{C}| \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{\tilde{C}}{x}\right|.$$

Общее решение:

$$y = \frac{\tilde{C}}{x},\ \tilde{C} = \text{const}.$$

Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Подставив это выражение в заданное уравнение, получим:

$$\frac{xC' - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} - 2e^{x^2} = 0,$$

$$\frac{C'}{x} - 2e^{x^2} = 0,$$

$$\frac{dC}{dx} = 2xe^{x^2},$$

$$dC = 2xe^{x^2}\,dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$C(x) = e^{x^2} + C.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{e^{x^2} + C}{x},$$

где $C = \text{const}$.

Найдём частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(1) = \frac{e + C}{1} = e + C = e \Rightarrow C = 0.$$

Ответ: $y = \dfrac{e^{x^2}}{x}$.

5 Решить уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решение. Данное ДУ является уравнением Бернулли, поэтому делаем замену $z = y^{-1}$. Тогда $y = -z^{-2}z'$ и уравнение примет вид

$$-xz^{-2}z' + z^{-1} = z^{-2}\ln x.$$

Умножив уравнение на z^2 и разделив на $(-x)$, получим

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Имеем линейное ДУ первого порядка, которое решаем по формуле (16) находим его решение:

$$z = \left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) e^{\int \frac{dx}{x}} = \left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\ln x} dx \right) e^{\ln x} =$$

$$= \left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{\ln x^{-1}} dx \right) x = \left(C - \int \frac{\ln x}{x^2} dx \right) x =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \ \ dv = x^{-2} dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, \ v = \int x^{-2} dx = -x^{-1} \end{array} \right] = \left(C + \frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2} \right) x =$$

$$= \left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) x = Cx + \ln x + 1.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим окончательный ответ:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{Cx + \ln x + 1}$, где $C = \text{const}$.

Задание

1 Решить линейные уравнения или уравнения Бернулли.

1 а) $(2x+1)y' = 4x + 2y$; б) $y' - xy = x^3 y^3$.

2 а) $y' + y = x^2 e^{-x}, y(0) = 3$; б) $2y' + y = \dfrac{x}{y}$.

3 а) $\left(xy + e^x\right) dx - x\,dy = 0$; б) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = y^2 (x+1)^4$.

4 а) $x^2 y' + xy + 1 = 0$; б) $y' - \dfrac{y}{x} + y^2 = 0, \ y(1) = 1$.

5 а) $y = x\left(y' - x\cos x\right)$; б) $xy' + y = y^2 \ln x$.

6 а) $2x\left(x^2+y\right)dx=dy$; б) $x^2y^2y'+xy^3=1$.

7 а) $\left(xy'-1\right)\ln x=2y$; б) $y^2+(x-1)y'+y=0$.

8 а) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$; б) $x^2y'+xy+x^2y^2=0$.

9 а) $x(y'-y)=e^x$; б) $y'+\dfrac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$.

10 а) $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+4x+5$; б) $xy'-(2x+1)y+y^2=0$.

11 а) $y'+2y=3e^x$; б) $y'+xy=x^3y^4$.

12 а) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$; б) $y^{-2}-(x-1)y'+y=0$.

13 а) $y'+y=\dfrac{x+3}{2}, y(1)=\dfrac{1}{2}$; б) $y'-y+y^2\cos x=0$.

14 а) $(x+1)y'+y=x^3+x^2$; б) $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$.

15 а) $xy'+y=\sin x$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^3$.

16 а) $xy'-2y=x,\ y(1)=1$; б) $(x^2-4)y'-4y=(x+2)y^2$.

17 а) $xy'-3y=3-4x-x^2,\ y(1)=3$; б) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

18 а) $y'\cos x+y\sin x=\cos x-x\sin x$; б) $xy'-2\sqrt{x^3y}=y$.

19 а) $xy'-4y=2x^2-3x$; б) $y'+2y=\dfrac{x^2}{y}$.

20 а) $xy'-2y=2\sin x-x\cos x$; б) $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$.

5 УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Уравнением в *полных дифференциалах* называется уравнение

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0, \tag{19}$$

левая часть которого есть полный дифференциал некоторой функции $U\left(x,y\right)$, т. е.

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=dU. \tag{20}$$

Необходимое и достаточное условие того, что левая часть уравнения (19) является полным дифференциалом некоторой функции, выражается равенством

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (21)$$

Если известна функция, полным дифференциалом которой является левая часть уравнения (19), то общий интеграл уравнения (20) определяется формулой

$$U(x, y) = C. \qquad (22)$$

Чтобы найти функцию $U(x, y)$, воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (23)$$

Интегрируя первое из этих равенств по переменной $x,$ определим функцию $U(x, y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции:

$$U(x, y) = \Phi(x, y) + C(y).$$

Дифференцируя это равенство по переменной $y,$ с учётом второго равенства из (23) получаем уравнения для определения функции $C(y)$.

Примеры решений типовых задач

1 Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0.$$

Решение. Для данного уравнения

$$P(x, y) = 2x - 3y, \quad Q(x, y) = 2y - 3x, \ \frac{\partial P}{\partial y} = -3, \frac{\partial Q}{\partial x} = -3.$$

Так как выполнено условие (21), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах; следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 3y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 3x. \qquad (24)$$

Интегрируя первое из этих уравнений (y при этом считается постоянным), находим

$$U(x,y) = x^2 - 3xy + \varphi(y), \tag{25}$$

где $\varphi(y)$ – функция, подлежащая определению.

Дифференцируя по y функцию $U = U(x,y)$ и принимая во внимание второе из равенств (24), получаем $-3x + \varphi'(y) = 2y - 3x,$ откуда

$$\varphi'(y) = 2y, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y, d\varphi = 2ydy, \varphi(y) = y^2 + \mathrm{C}_1.$$

Подставив выражение для $\varphi(y)$ в равенство (25), найдём

$$U(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + \mathrm{C}_1.$$

В соответствии с формулой (22) получаем

$$x^2 - 3xy + y^2 + \mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 \text{ или } x^2 - 3xy + y^2 = \mathrm{C}, \text{ где } C = C_2 - C_1.$$

Ответ: $x^2 - 3xy + y^2 = C$ – общий интеграл данного уравнения.

2 Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x\left(1-e^y\right)dx}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{e^y dy}{1+x^2} = 0.$$

Решение. Так как выполнено условие (21), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах; следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0.$$

Запишем частные производные первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{e^y}{1+x^2}. \end{cases}$$

Интегрируем первое из этих уравнений:

$$U=\int\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}=\left(1-e^y\right)\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1-e^y}{1+x^2}+C(y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C(y).$$

Находим частную производную по переменной y:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{e^y-1}{1+x^2}+C(y)\right)'_y=\frac{e^y}{1+x^2}+C'(y)=\frac{e^y}{1+x^2}.$$

Из последнего равенства следует, что $C'(y)=0$, и это простейший случай:

$$C(y)=C=\text{const}.$$

Подставляем найденную функцию $C(y)=C$ в «недоделанный» результат

$$U(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C.$$

Ответ: общий интеграл: $\dfrac{e^y-1}{1+x^2}+C=0$, где $C=\text{const}$.

3 Решить уравнение

$$(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xy dy=0.$$

Решение. Вычислим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\sin xy+xy\cos xy)=2x\cos xy-x^2y\sin xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cos xy\right)=2x\cos xy-x^2y\sin xy,$$

так что условие (20) выполнено. Таким образом:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\sin xy+xy\cos xy,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=x^2\cos xy,$$

поэтому

$$U(x,y)=\int(\sin xy+xy\cos xy)dx+C(y),$$

где $C(y)$ пока неопределённая функция.

Интегрируя, получаем

$$U(x,y)=x\sin xy+C(y).$$

Находим частную производную по переменной y, и она должна равняться $x^2\cos xy$, что даёт

$$x^2\cos xy+C'(y)=x^2\cos xy,$$

откуда $C'(y)=0$, так что $C(y)=C$. Таким образом,

$$U(x,y)=x\sin xy+C.$$

Ответ: $x\sin xy=C$ – общий интеграл дифференциального уравнения.

Задание

1 Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

1 $2xy\,dx+\left(x^2-y^2\right)dy = 0.$

2 $\left(2-9xy^2\right)xdx+\left(4y^2-6x^3\right)ydy = 0.$

3 $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy = 0.$

4 $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy = 0.$

5 $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0.$

6 $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy = 0.$

7 $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x\,dy = 0.$

8 $3x^2(1+\ln y)dx = \left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy.$

9 $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0.$

10 $3x^2e^y dx + \left(x^3e^y - 1\right)dy = 0.$

11 $\left(3x^2 - 2y^2 + 8xy\right)dx + \left(4x^2 - 4xy - 3y^2\right)dy = 0.$

12 $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx + \dfrac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$

13 $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0.$

14 $\dfrac{y}{x^2}dx - \dfrac{xy+1}{x}dy = 0.$

15 $\left(xe^x + \dfrac{y}{x^2}\right)dx = \dfrac{1}{x}dy.$

16 $2x\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx + 2y\sqrt{x^2-y^2}dy = 0.$

17 $\left(4x^3 + 15x^2y + 8xy^2\right)dx + \left(5x^3 + 8x^2y - 4y^3\right)dy = 0.$

18 $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0.$

19 $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0.$

20 $e^y dx + \left(\cos y + xe^y\right)dy = 0.$

6 ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (19). Пусть это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Умножим его на дифференцируемую функцию $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y) = 0. \qquad (26)$$

Если уравнение (26) является уравнением в полных дифференциалах, то функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* для уравнения (19). Понятно, что $\mu(x,y)$ есть решение уравнения

$$\mu(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}. \qquad (27)$$

В некоторых частных случаях уравнение (27) упрощается и интегрирующий множитель легко найти. Рассмотрим несколько таких случаев.

1 Если уравнение (19) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, то есть $\mu(x, y) = \mu(x)$, то из (27) имеем

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}. \tag{28}$$

2 Если уравнение (19) допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y , то есть $\mu(x, y) = \mu(y)$, то из (27) имеем

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{P'_y - Q'_x}{-P}. \tag{29}$$

3 Если уравнение (19) имеет интегрирующий множитель вида $\mu(\omega(x, y))$, где $\omega(x, y)$ – известная функция, то

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y}. \tag{30}$$

Примеры решений типовых задач

1 Решить уравнение

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0.$$

Решение. Выясним, имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель как функцию одной переменной. Вычислим

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\frac{1}{x}.$$

Следовательно, интегрирующий множитель зависит только от x. Находим его из уравнения

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=-\frac{1}{x},\ \mu=\frac{1}{x}.$$

Умножая исходное уравнение на эту функцию, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$$

Записав его в виде

$$\frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{y}+2y\right)dy-\frac{xdy-ydx}{y^2}=0,$$

$$d\left(\ln|x|+\ln|y|+y^2-\frac{x}{y}\right)=0,$$

$$\ln|x|+\ln|y|+y^2-\frac{x}{y}=C.$$

Ответ: $\ln|x|+\ln|y|+y^2-\dfrac{x}{y}=C.$

2 Решить уравнение $xdy=(3x^2\cos y-\sin y)\cos ydx$.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos ydx-xdy=0.$$

И вычислим значение выражения

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=-3x^2 2\cos y\sin y-\cos 2y+1=-2\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\sin y.$$

Если полученное выражение разделить на $-P(x,y)$, то частное окажется функцией только переменной y. Следовательно, интегрирующий множитель есть функция от y. Найдём его из уравнения

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=2\operatorname{tg}y,\ \frac{d\mu}{\mu}=2\operatorname{tg}ydy,\ \int\frac{d\mu}{\mu}=\int 2\operatorname{tg}ydy,\ \ln|\mu|=-2\ln|\cos y|.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмём $\mu(y)=\cos^{-2} y$.

Умножая обе части уравнения на него, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(3x^2-\mathrm{tg}y\right)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0.$$

Решим его:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2-\mathrm{tg}y,\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$U(x,y)=\int\left(3x^2-\mathrm{tg}y\right)dx=x^3-x\mathrm{tg}y+C(y),$$

Находим частную производную по переменной y и она должна равняться $-\dfrac{x}{\cos^2 y}$, что даёт

$$-\frac{x}{\cos^2 y}\ +\ C'(y)=-\frac{x}{\cos^2 y},\ C'(y)=0,\ C(y)=\mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$U(x,y)=x^3-x\mathrm{tg}\, y.$$

Отметим, что при делении на $\cos^2 y$ потеряны решения исходного уравнения $y=0{,}5\pi+k\pi,\ k\in Z.$

3 Решить уравнение $ydx-\left(x+x^2+y^2\right)dy=0,$ если известно, что оно имеет интегрирующий множитель как функцию от $\left(x^2+y^2\right)$.

Решение. Интегрирующий множитель найдём по формуле (32), полагая в ней $\omega=x^2+y^2$. Имеем

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q\omega'_x-P\omega'_y}=\frac{1+1+2x}{-\left(x+x^2+y^2\right)2x-y2y}=-\frac{1}{\omega},$$

$$\frac{d\mu}{\mu}+\frac{d\omega}{\omega}=0,\ \mu(x,y)=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Умножив исходное уравнение на $\frac{1}{x^2+y^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{ydx}{x^2+y^2}-\left(\frac{x}{x^2+y^2}+1\right)dy=0.$$

Решим его, т. е. найдём функцию $U(x,y)$ такую, что:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\left(\frac{x}{x^2+y^2}+1\right).$$

Интегрируя первое равенство, получим:

$$U(x,y)=\int\frac{ydx}{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C(y).$$

Подставим полученную функцию во второе равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C(y)\right)=-\left(\frac{x}{x^2+y^2}+1\right),$$

$$\frac{dC}{dy}=-1,\ C(y)=-y+C.$$

Следовательно, $U(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\ -\ y+C$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-y\ =C,\ y=0$.

Задание

1 Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$.

1 $\left(x^2+y^2+x\right)dx+y\,dy\ =\ 0.$

2 $\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y dx-x\,dy\ =\ 0.$

3 $y^2\,dx-2x^3ydy = 2x^3dx.$

4 $ydx+x\ln xdy = 0.$

5 $y^2\,dx-\left(xy+x^3\right)dy = 0.$

6 $\left(e^x-y\right)\sqrt{y}dx+\left(1-x\sqrt{y}\right)dy = 0.$

7 $\left(x^2+3\ln y\right)y\,dx = x\,dy.$

8 $(2xy\ln y+y^2\cos x)dx+\left(x^2+y\sin x\right)dy = 0.$

9 $y(x+y)dx+(xy+1)dy = 0.$

10 $y(y^2+1)dx+3xy^2dy = 0.$

11 $\left(x^2+2x+y\right)dx = \left(x-3x^2y\right)dy.$

12 $y^2dx+\left(e^x-2y\right)dy = 0.$

13 $(yx^2-1)dx+\left(x^3+x\cos y\right)dy = 0.$

14 $-2xy\,dx = \left(y^3+x^2y+x^2\right)dy.$

15 $x^2y(y\,dx+x\,dy) = 2y\,dx+4x\,dy.$

16 $\left(x^2-y^2+y\right)dx+x\left(2y-1\right)dy = 0.$

17 $2\left(x^2y^2-y\right)dx+\left(x^3y-x\right)dy = 0.$

18 $2xy\ln ydx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0.$

19 $\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2y\,dy = 0.$

20 $\left(x^2y^2-1\right)dy+2x^3y\,dx = 0.$

7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной, имеет вид

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{31}$$

При решении такого уравнения желательно разрешить его относительно y', то есть получить одно или несколько уравнений, разрешённых относительно производной:

$$y' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2 \ldots k. \tag{32}$$

Однако не всегда уравнение (31) разрешается относительно y' и ещё реже полученные после разрешения уравнения (32) легко интегрируются. Поэтому уравнения вида (31) часто приходится решать методом введения параметра.

Пусть уравнение (31) легко разрешается относительно x или y, например, его можно записать в виде $y = f(x, y')$. Введя параметр $p = y'$, получим $y = f(x, p)$.

Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства и заменив dy через pdx, получим уравнение:

$$pdx = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dp.$$

Если найдём решение этого уравнения $x = \Phi(p, C)$, то решение исходного уравнения запишем в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \Phi(p, C), \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

Примерами уравнений, которые решаются предложенным методом, являются уравнения *Лагранжа*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

и *Клеро*

$$y = xy' + \psi(y').$$

Как и уравнения, разрешённые относительно производной, уравнения вида (31) могут иметь особые решения, т. е. такие решения, соответствующая интегральная кривая которых целиком состоит из точек не единственности.

Если функция $F(x, y, y')$ непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по y и y', то особое решение уравнения (31), если оно имеется, удовлетворяет системе уравнений

$$
\begin{cases}
F(x,y,y')=0,\\
\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0.
\end{cases}
\tag{33}
$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (31), из системы уравнений (33) надо исключить y'. Полученное при этом уравнение определяет дискриминантную кривую (особую интегральную кривую). Для каждой ветви дискриминантной кривой необходимо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (31), и если является, то окажется ли это решение особым.

Примеры решений типовых задач

1 Решить уравнение

$$\left(y'\right)^2+y\left(y-x\right)y'-xy^3=0.$$

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$\left(y'+y^2\right)\left(y'-xy\right)=0.$$

Следовательно, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$
\left[
\begin{array}{l}
y'+y^2=0,\\
y'-xy=0.
\end{array}
\right.
$$

Решения первого из них $y=0,\ y=\dfrac{1}{x+C}$, а второго $y=Ce^{0,5x^2}$. Окончательно $\left(y-Ce^{0,5x^2}\right)\left(y-\dfrac{1}{x+C}\right)=0$.

Ответ: $\left(y-Ce^{0,5x^2}\right)\left(y-\dfrac{1}{x+C}\right)=0$.

2 Решить уравнение $\left(y'\right)^2+\left(\sin x-2xy\right)y'-2xy\sin x=0.$

Решение. Данное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений, разрешённых относительно производной:

$$\frac{dy}{dx}+\sin x=0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx}-2xy=0.$$

Решения первого из этих уравнений $y=\cos x+C,$ а второго $y=Ce^{x^2}$. Поэтому решения исходного уравнения

$$\left(y-\cos x-C\right)\left(ye^{-x^2}-C\right)=0.$$

3 Решить уравнение $y=(y')^2e^{y'}$.

Решение. Введём параметр $p=y'=\dfrac{dy}{dx}.$

Тогда

$$y=p^2e^p \Rightarrow dy=\left(2pe^p+p^2e^p\right)dp.$$

Кроме того, $dy=pdx$, поэтому $pdx=p\left(2+p\right)e^pdp.$

Отсюда

$$p=0 \text{ либо } x=2e^p+e^p\left(p-1\right)+C=e^p\left(p+1\right)+C.$$

Таким образом, решениями исходного уравнения являются

$$y=C \text{ и } \begin{cases} y=p^2e^p \\ x=e^p\left(p+1\right)+C. \end{cases}$$

Ответ: $y=C$ и $\begin{cases} y=p^2e^p \\ x=e^p\left(p+1\right)+C. \end{cases}$

4 Решить уравнение $y'\sin y'+\cos y'-y=0.$

Решение. Данное уравнение разрешимо относительно y, поэтому, положив $y'=p,$ имеем $y=p\sin p+\cos p.$ Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p=\frac{dp}{dx}\sin p+p\cos p\frac{dp}{dx}-\sin p\frac{dp}{dx}, \quad p=p\cos p\frac{dp}{dx}.$$

Из этого уравнения находим $p=0$ и $x=\sin p+C.$

Следовательно,

$$y=C \text{ и } \begin{cases} x=\sin p+C, \\ y=p\sin p+\cos p. \end{cases}$$

5 Решить уравнение $(y')^2+(x+a)y'-y=0.$

Решение. Введём параметр $p=y',$ тогда $y=p^2+(x+a)p.$

Из равенств

$$dy=pdx \text{ и } dy=2pdp+(x+a)dp+pdx,$$

имеем:

$$pdx=2pdp+(x+a)dp+pdx, \ (2p+x+a)dp=0.$$

Отсюда $p=C,$ или $2p+x+a=0.$ Поэтому решения исходного уравнения имеют вид

$$y=(x+a)C+C^2. \text{ и } \begin{cases} y=p^2+(x+a)p, \\ 2p+x+a=0. \end{cases}$$

Исключив из последних двух равенств параметр p, получим

$$y = C(x+a) + C^2 \text{ и } y = -\frac{(x+a)^2}{4}.$$

6 Решить уравнение $\sqrt{(y')^2+1}+xy'-y=0.$

Решение. Это уравнение Клеро. Положим $p=y',$ тогда $y=xp+\sqrt{1+p^2}.$ Дифференцируя последнее равенство по $x,$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p\frac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Отсюда

$$\left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0, \ x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ или } p=c.$$

Таким образом,

$$y = cx + \sqrt{1+c^2} \text{ и } \begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y=px+\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

Исключив из последних двух равенств параметр p, получим $y=\sqrt{1-x^2}$.

7 Решить уравнение $x^4\left(y'\right)^2-xy'-y=0.$

Решение. Введём параметр $p=y'$, тогда $y=x^4p^2-xp$. Из равенств

$$dy=pdx \text{ и } dy=4x^3p^2dx+2px^4dp-xdp-pdx.$$

Получим

$$\left(2p-4x^3p^2\right)dx=\left(2px^4-x\right)dp, \text{ или } \left(1-2px^3\right)\left(2pdx+xdp\right)=0.$$

Отсюда

$$1-2px^3=0, \text{ или } 2pdx+xdp=0.$$

Первое из этих равенств даёт решение исходного уравнения:

$$\begin{cases}1-2px^3=0,\\ y=x^4p^2-xp,\end{cases} \text{ или } y=\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{4x^2}.$$

Исключив из последних двух равенств параметр p, находим остальные решения исходного уравнения: $y=C^2-\dfrac{C}{x}$.

8 Решить уравнение $x\dfrac{dy}{dx}=y+x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

Решение. Положим $\dfrac{dy}{dx}=p$; тогда $y=x\left(p-\sqrt{1+p^2}\right)$. Дифференцируя это равенство по x, получим:

$$\frac{dy}{dx}=p-\sqrt{1+p^2}+x\left(1-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

$$p=p-\sqrt{1+p^2}+x\left(1-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

$$x\left(1-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dx}{x}+\left(\frac{p}{1+p^2}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp=0,$$

$$\ln|x|-\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln C,$$

$$x=\frac{C\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Запишем решения исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=\dfrac{C\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y=x\left(p-\sqrt{1+p^2}\right). \end{cases}$$

Исключая параметр p из этих двух равенств, получим

$$\left(x-C\right)^2+y^2=C.$$

9 Решить уравнение $y'+y=x(y')^2$.

Решение. Данное уравнение легко разрешимо относительно y:

$$y=x\left(y'\right)^2-y'.$$

Это уравнение Лагранжа. Введём параметр $p=y'$; тогда $y=xp^2-p$. Дифференцируя по x, имеем

$$\frac{dy}{dx}=p^2+2px\frac{dp}{dx}-\frac{dp}{dx},\text{ или } p=p^2+2px\frac{dp}{dx}-\frac{dp}{dx}.$$

Получим линейное уравнение

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{1}{p\left(p-1\right)},$$

решая его, находим

$$x=\frac{p-\ln p+C}{\left(p-1\right)^2}.$$

10 Решить уравнение

$$y^{2/3}+(y')^{2/3}=1.$$

Решение. Полагаем $y=\cos^3 t,\ p=\sin^3 t$, тогда имеем

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{-3\cos^2 t\sin t dt}{\sin^3 t}=-3\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt.$$

Отсюда

$$x=-3\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(3-\frac{3}{\sin^2 t}\right)dt=3t+3\operatorname{ctg} t+C\ ,$$

общее решение

$$\begin{cases} x=3t+3\operatorname{ctg} t+C \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=3t+3\operatorname{ctg} t+C \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

Задание

6 Решить уравнения.

1	$y'^2+xy\ =\ yy'+xy'.$	11	$x\ =\ y'^3+y'.$
2	$xy'^2-2yy'+x\ =\ 0.$	12	$x\ =\ y'\sqrt{y'^2+1}.$
3	$y'^2+x\ =\ 2y.$	13	$y\ =\ y'^2+2y'^3.$
4	$y'^2-2xy'\ =\ 8x.$	14	$(y'+1)^3\ =\ (y'-y)^2.$
5	$y'^2-2yy'\ =\ y\left(e^x-1\right).$	15	$y'^4-y'^2\ =\ y^2.$
6	$y'(2y-y')\ =\ y\sin^2 x.$	16	$y'^4\ =\ 2yy'+y^2.$
7	$y'^4+y^2\ =\ y^4.$	17	$5y+y'^2\ =\ x(x+y').$
8	$x(y-xy')^2\ =\ xy'^2-2yy'.$	18	$y'^3+y^2\ =\ xyy'.$
9	$y(xy'-y)^2\ =\ y-2xy'.$	19	$y'\ =\ e^{\frac{xy'}{y}}.$
10	$xy'(xy'+y)\ =\ 2y.$	20	$y\ =\ xy'-x^2y'^3.$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

Ответы к заданию раздела «Уравнения с разделяющимися переменными»

1 $C\left(x^2+1\right)^2 = \left(y^2+2\right)^3.$

2 $1-y^2 = \left(x^2+C\right)^2.$

3 $\left(x^2+3\right)^3 C = \left(2+y^2\right)^2.$

4 $C\left(1+x^2\right)+1+y^2 = 0.$

5 $\operatorname{arctg} x + C = 0{,}5\ln\left(3+y^2\right).$

6 $C+\ln\frac{x}{y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$

7 $y = \frac{C}{\sqrt[3]{e^{3x}+7}}.$

8 $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C.$

9 $y = \frac{25}{4}(x+C)^2.$

10 $e^y = e^x + C.$

11 $e^{y^2} = C\left(4+e^x\right)^2.$

12 $\operatorname{arctg} y = \sqrt{4-x^2}+C.$

13 $y = C\sin x - 1.$

14 $\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-x^2} = C.$

15 $y = C\left(e^x+8\right).$

16 $C = x\ln y.$

17 $\frac{1-y}{1+y} = e^{2(x+C)}.$

18 $C = e^x\left(1+e^y\right).$

19 $y = \left(1+e^x\right)C.$

20 $10^x+10^{-y} = C.$

Ответы к заданию раздела «Однородные дифференциальные уравнения первого порядка»

1 $x+y = Cx^2.$

2 $\ln\left(x^2+y^2\right) = C-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$

3 $x(y-x) = C; y = 0.$

4 $x = \pm y\sqrt{\ln Cx}; y = 0.$

5 $y = Ce^{\frac{y}{x}}.$

6 $y^2-x^2 = Cy; y = 0.$

7 $\sin\frac{y}{z} = Cx.$

11 $2\sqrt{xy} = x\ln Cx; y = 0; x = 0.$

12 $\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx\cdot\operatorname{sgn} x; y = \pm x.$

13 $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2; y = x+1.$

14 $2x+y-1 = Ce^{2y-x}.$

15 $(y-x+2)^2+2x = C.$

16 $(y-x+5)^5(x+2y-2) = C.$

17 $(y+2)^2 = C(x+y-1); y = 1-x.$

8 $y = -x\ln\ln Cx.$

9 $\ln\dfrac{x+y}{x} = Cx.$

10 $\ln Cx = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right);$

18 $y+2 = Ce^{-2\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}}.$

19 $\ln\dfrac{y+z}{z+3} = 1+\dfrac{C}{x+y}.$

20 $\sin\dfrac{y-2x}{x+1} = C(x+1).$

Ответы к заданию раздела «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»

1 а) $y = (2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1;$ б) $y^2 = \dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-x^2\right)+C}.$

2 а) $y = e^{-x}\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right);$ б) $y^2 = x-1+Ce^{-x}.$

3 а) $y = e^x(\ln|x|+C); x = 0;$ б) $y = \dfrac{7(x+1)^2}{(x+1)^7+7C}.$

4 а) $xy = C-\ln|x|;$ б) $y = \dfrac{2x}{x^2+2C}.$

5 а) $y = x(C+\sin x);$ б) $y = \dfrac{1}{\ln x+1+Cx}.$

6 а) $y = Ce^{x^2}-x^2-1;$ б) $y^3x^3 = 1{,}5x^2+C.$

7 а) $y = C\ln^2 x-\ln x;$ б) $y = \dfrac{1}{C(x-1)-1}.$

8 а) $xy = \left(x^3+C\right)e^{-x};$ б) $y = \dfrac{1}{x\left(\ln|x|+C\right)}.$

9 а) $y = e^x(\ln|x|+C);$ б) $\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2}-\dfrac{1-x^2}{3}.$

10 а) $y=\dfrac{(x+2)^3}{2}+(x+2)(\ln\ (x+2)+C);$ б) $y = \dfrac{2xe^{2x}}{e^{2x}+2C}.$

11 а) $y = e^{-2x}\left(e^{3x}+C\right);$ б) $\dfrac{1}{y^3} = x^2+\dfrac{2}{3}+Ce^{\frac{3}{2}x^2}.$

12 а) $y = -2\cos^2 x+C\cos x;$ б) $y^3+1 = C(x-1)^3.$

13 а) $y = 0{,}5x+2+Ce^{-x};$ б) $y = \dfrac{2e^x}{e^x(\cos x+\sin x)+C}.$

14 а) $y = \dfrac{3x^4+4x^3}{12(x+1)}$; б) $y=e^{3x}\left(\dfrac{2x+1}{6}e^{-2x}+C\right)^{\frac{3}{2}}$.

15 а) $y = \dfrac{C-\cos x}{x}$ б) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{C-2x}}$,

16 а) $y = Cx^2-x$; б) $y=\dfrac{2-x}{(x+2)\left(\ln|x+2|+C\right)}$.

17 а) $y = Cx^3+x^2+2x-1$; б) $y = \dfrac{x^4}{4}(C+\ln x)^2$.

18 а) $y = \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{Cx^5-x}, y = \dfrac{2}{x}$; б) $y = x\left(0{,}5x^2+C\right)^2$.

19 а) $y = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Cx^{\frac{2}{8}}+x}, y = \dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{e^{4x}(8x^2-2x+1)+C}}{4e^{2x}}$.

20 а) $y = x+\dfrac{x}{x+C}, y = x$; б) $y = \dfrac{1}{\cos x\sqrt[3]{C-\operatorname{tg} x}}$.

Ответы к заданию раздела «Уравнения в полных дифференциалах»

1 $3x^2y-y^3 = C$.

2 $x^2-3x^3y^2+y^4 = C$.

3 $xe^{-y}-y^2 = C$.

4 $4y\ln x+y^4 = C$.

5 $x+\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{5}{y} = C$.

6 $x^2+\dfrac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}} = C$.

7 $x-y^2\cos^2 x = C$.

8 $x^3+x^3\ln y-y^2 = C$.

9 $x^2+1 = 2\left(C-2x\right)\sin y$.

10 $x^3e^y-y = C$.

11 $x^3-2xy^2+4x^2y-y^3 = C$.

12 $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{1}{xy} = C$.

13 $xe^{-y}-y^2 = C$.

14 $-\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{2} = C$.

15 $(x-1)e^x-\dfrac{y}{x} = C$.

16 $x^2-\dfrac{2}{3}\left(x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}} = C$.

17 $x^4+5x^3y+4x^2y^2-y^4 = C$.

18 $Cx^3+y^2+x^2 = 0$.

19 $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = C$.

20 $xe^y+\sin x = C$.

Ответы к заданию раздела «Интегрирующий множитель»

1 $2x+\ln\left(x^2+y^2\right) = C.$

2 $x^3-x\,\mathrm{tg}\,y = C.$

3 $x^2+\sin^2 y = Cx.$

4 $y\ln x+C = 0.$

5 $y^2 = x^2\left(C-2y\right);\ x = 0.$

6 $\left(x^2-C\right)y = 2x.$

7 $x^2+\ln y = Cx^3;\ x = 0.$

8 $x^2\ln y+y\sin x = C.$

9 $\dfrac{x^2}{2}+xy+\ln|y| = C;\ y = 0.$

10 $x\left(y^2+1\right)^{1,5} = C.$

11 $x+2\ln|x|+\dfrac{3}{2}y^2-\dfrac{y}{x}=C;\ x=0.$

12 $y-e^{-x}y^2 = C.$

13 $\ln|y|-y\mathrm{e}^{-z} = C;\ y = 0.$

14 $\ln\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right) = 2y+C;\ y = 0.$

15 $x^2y\ln Cxy = -1;\ x = 0;\ y = 0.$

16 $x^2+y^2 = y+Cx;\ x = 0.$

17 $x^2y+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right| = C;\ x = 0;\ y = 0.$

18 $x^2\ln y+\dfrac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{1,5} = C.$

19 $\sin^2 y = Cx-x^2;\ x = 0.$

20 $xy^2+\dfrac{1}{x} = C.$

Ответы к заданию раздела «Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной»

1 $y = C\mathrm{e}^{x};\ y = C\mathrm{e}^{-x}+x-1.$

2 $x^2+C^2 = 2Cy;\ y = \pm x.$

3 $\ln|1\pm 2\sqrt{2y-x}| = 2\left(x+C\pm\sqrt{2y-x}\right);\ 8y = 4x+1.$

4 $y = 2x^2+C;\ y = -x^2+C.$

5 $\ln Cy = x\pm 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}};\ y = 0.$

6 $\ln Cy = x\pm\sin x;\ y = 0.$

7 $\dfrac{\mathrm{arctg}\,u+\frac{1}{2}\ln|(u-1)}{(u+1)|=\pm x+C},\ u = \sqrt[4]{1-\left(\dfrac{1}{y^2}\right)};\ y = 0;\ y = \pm 1.$

8 $x^2+\left(Cy+1\right)^2 = 1;\ y = 0.$

9 $\left(Cx+1\right)^2 = 1-y^2.$

10 $x^2y = C;\ y = Cx.$

11 $x = p^3 + p,\ 4y = 3p^4 + 2p^2 + C.$

12 $x = p\sqrt{p^2+1},\ 3y = \left(2p^2-1\right)\sqrt{p^2+1}+C.$

13 $x = 3p^2 + 2p + C,\ y = 2p^3 + p^2;\ y = 0.$

14 $x = \ln|p| \pm \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1}\right| \pm 3\sqrt{p+1} + C,\ y = p \pm (p+1)^{\frac{3}{2}};\ y = \pm 1.$

15 $x = \pm\left(2\sqrt{p^2-1} + \arcsin\frac{1}{|p|}\right) + C,\ y = \pm p\sqrt{p^2-1};\ y = 0.$

16 $x = \pm 2\sqrt{1+p^2} - \ln\left(\sqrt{p^2+1} \pm 1\right) + C,\ y = -p \pm p\sqrt{p^2+1};\ y = 0.$

17 $x = -\frac{p}{2} + C,\ 5y = C^2 - \frac{5p^2}{4};\ x^2 = 4y.$

18 $pxy = y^2 + p^3,\ y^2\left(2p+C\right) = p^4;\ y = 0.$

19 $Cx = \ln Cy;\ y = ex.$

20 $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1,\ y = xp - x^2p^3;\ y = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1 Альсевич, Л. А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л. А. Альсевич, С. А. Мазаник, Л. П. Черенкова. – Минск : БГУ, 2000. – 311 с.

2 Богданов, Ю. С. Дифференциальные уравнения / Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид. – Минск : Універсітэцкае, 1996. – 287 с.

3 Богданов, Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям / Ю. С. Богданов. – Минск : Універсітэцкае, 1977. – 240 с.

4 Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – СПб. : Лань. 2003. – 832 с.

5 Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – 7-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.

6 Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.

7 Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 236 с.

8 Шилин, А. П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры / А. П. Шилин. – Минск : РИВШ, 2008. – 368 с.

Производственно-практическое издание

Немилостивая Виолетта Анатольевна,
Парукевич Ирина Викторовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Практическое пособие

Редактор Е. С. Балашова
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 28.01.2025. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,05.
Тираж 10 экз. Заказ 47.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.