степени $\deg P = n$, высоты $H = H(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$, имеющий корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. При $n \geq$ ≥ 2 число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |\alpha_i - \alpha_j|^2$$

называется дискриминантом полинома $P(x)$.

Из данного определения напрямую следует, $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни. Кроме того, хорошо известно, что $D(P) \in \mathbb{Z}$. К. Малер и Х. Давенпорт показали, что от величины $|D(P)|$ зависит расстояние между $x \in \mathbb{R}$ и ближайшим к x корнем $P(x)$. Основываясь на этих неравенствах, Б. Фолькман доказал гипотезу Малера для полиномов третьей степени. Многочисленные приложения дискриминантов зависят от количества полиномов $P(x)$ в классе

$$\mathcal{P}_n(Q,v) = \left\{P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ \deg P = n,\ H(P) \leqslant Q,\ 0 < |D(P)| < Q^{2n-2-2v},\ Q \in \mathbb{N}\right\}$$

при фиксированном n, $0 \leqslant v \leqslant n-1$, и $Q \to \infty$.

В получении оценок снизу и сверху для $\#\mathcal{P}_n(Q,v)$ принимали участие В.Г. Спринджук, М. Додсон, О. Куксо, Д. Коледа. Приведем наиболее сильные на сегодняшний день результаты.

Наилучшая известная оценка снизу получена в работе [1], где В.В. Бересневич, В.И. Берник и Ф. Гётце доказали, что при подходящей положительной величине $c_1(n)$ верно асимптотическое неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q,v) \geq c_1(n)Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}, \quad 0 \leqslant v \leqslant n-1. \tag{1}$$

Этот результат основан на глубоких теоремах В.В. Бересневича, Д. Клейнбока и Г.А. Маргулиса, использующих методы теории динамических систем. Данная оценка является, скорее всего, неулучшаемой с точностью до констант.

Асимптотически совпадающие с (1) оценки сверху получены лишь для $n \leqslant 3$, в общем случае известные результаты явно допускают значительные улучшения. Недавно Д.А. Бодягин доказал [2], что при любом $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q,v) \leqslant c_2(\varepsilon)Q^{4-\frac{5}{3}v+\varepsilon}, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2. \tag{2}$$

Мы предлагаем метод, позволяющий получить оценку (2) для полиномов четвёртой степени при $0 \leqslant v \leqslant 2$ и некоторых интервалов в промежутке $2 \leqslant v \leqslant 3$, который основан на недавнем результате [3].

Литература

1. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. *Integral polynomials with small discriminants and resultants* // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.04.022

2. Badziahin D. *Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve* // 2024. arXiv preprint arXiv:2403.17685.

3. Берник В. И., Васильев Д. В., Калоша Н. И., Пантелеева Ж. И. *Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2023. Т. 67, № 4. С. 271–278. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278

О ПОДГРУППАХ ФРАТТИНИЕВА ТИПА В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Р.В. Бородич, С.Ф. Каморников

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь,
borodich@gsu.by, sfkamornikov@mail.ru

Пусть θ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее подгрупп. Следуя [1], назовем отображение θ *подгрупповым функтором*, если $(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ каждой группы G.

Подгрупповой функтор θ называется *m-функтором*, если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит группу G и некоторые ее максимальные подгруппы. Подгруппа $\Phi_\theta(G)$, равная пересечению всех подгрупп из $\theta(G)$, называется *подгруппой фраттиниева типа, индуцированной m-функтором* θ, или, короче, θ-*подгруппой Фраттини* группы G.

Подгрупповой m-функтор называется *регулярным*, если выполняются следующие два условия:

1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \theta(G)$ всегда следует $MN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $M \in \theta(G)$.

Бэр в [2] доказал, что если P – нормальная силовская подгруппа группы G, то $\Phi(P) = P \cap \Phi(G)$. В [3] доказано, что если H – нормальная холлова подгруппы группы G, то $\Phi(H) = H \cap \Phi(G)$. В основе доказательства лежат классический результат Л.А. Шеметкова из [4] о существовании π-дополнений к нормальным подгруппам.

Будем говорить, что подгрупповой m-функтор θ *обладает* $Hall\Phi$-*свойством*, если $\Phi_\theta(H) = H \cap \Phi_\theta(G)$ для любой нормальной холловой подгруппы H каждой группы G.

В 2007 году Л.А. Шеметковым были отмечены следующие две задачи, открывающие новые свойства холловых подгрупп:

1) *Найти все m-функторы, обладающие* $Hall\Phi$-*свойством.*

2) *Найти все регулярные m-функторы, обладающие* $Hall\Phi$-*свойством.*

В данной работе строятся бесконечные серии новых регулярных и нерегулярных m-функторов, обладающих $Hall\Phi$-свойством.

Пусть $\mathfrak{I}$ – класс всех простых групп (включая и абелевы простые группы). Следуя [1], для класса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{I}$ через $E\mathfrak{X}$ обозначим класс всех тех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что $E\mathfrak{X}$ – формация Фиттинга.

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B – нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга – это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Из определения класса Фиттинга следует, что для любого класса $\mathfrak{X}$ простых групп в каждой группе G существует наибольшая нормальная $E\mathfrak{X}$-подгруппа, равная произведению всех ее нормальных $E\mathfrak{X}$-подгрупп. Эта подгруппа обозначается $G_{E\mathfrak{X}}$ и называется $E\mathfrak{X}$-*радикалом* группы G.

Пусть далее $\mathfrak{X}$ – некоторый класс простых групп и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ – подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе G все ее максимальные подгруппы, содержащие $G_{E\mathfrak{X}}$. Простая проверка показывает, что

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}} = \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}}),$$

т.е. подгруппа $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$ совпадает с полным прообразом в G группы $\Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$.

Следующая теорема устанавливает, что подгрупповой m-функтор $\theta_{E\mathfrak{X}}$ обладает $Hall\Phi$-свойством.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс простых групп. Если H – нормальная холлова подгруппа группы G, то $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.*

Если $\mathfrak{X}$ – пустой класс, то $E\mathfrak{X}$ – класс единичных групп, а значит, в этом случае $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G)$. Таким образом, теорема 1 включает отмеченные выше результаты Бэра и Берковича.

Если π – некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{X}$ – класс всех простых π-групп, то $E\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\pi$ – класс всех π-групп и $G_{E\mathfrak{X}} = O_\pi(G)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел, и θ_π – подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π. Этот подгрупповой m-функтор является регулярным. Следуя [1], подгруппу фраттиниева типа группы G, индуцированную m-функтором θ_π, будем обозначать $\Phi_\pi(G)$. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p и θ – подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p, θ-подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G совпадает с введенной Дескинсом в [5] подгруппой $\Phi_p(G)$.

Отметим, что в общем случае m-функторы $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ и θ_π различны. В отличие от m-функтора $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ m-функтор θ_π является регулярным. В то же время подгруппы фраттиниева типа, индуцированные m-функторами $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ и θ_π, в любой конечной группе совпадают.

Теорема 2. *Пусть* π *– некоторое множество простых чисел. Тогда для любой группы G имеет место равенство* $\Phi_{\mathfrak{G}_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что:

– если H — нормальная холлова подгруппа группы G, то $\Phi_\pi(H) = H \cap \Phi_\pi(G)$ *для любого множества* π *простых чисел*;

– если R — нормальная силовская подгруппа группы G, то $\Phi_p(R) = R \cap \Phi_p(G)$ *для любого простого числа p.*

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20211749).

Литература

1. Каморников С Ф., Селькин М. В. *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*. Мн: Белорусская наука, 2003.

2. Baer R. *Supersoluble immersion* // Can. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.

3. Berkovich Y. *Alternate proofs of some basic theorems of finite groups theory* // Glasnik Matem. 2005. Vol. 40. P. 207–233.

4. Шеметков Л. А. *О существовании π-дополнений к нормальным подгруппам конечных групп* // ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 1. С. 50–52.

5. Deskins W E. *A condition for the solvability of a finite group* // Ill. J. Math. 1961. Vol. 5, No 2. P. 306–313.

НЕСКОЛЬКО РЕЗУЛЬТАТОВ, КАСАЮЩИХСЯ БЫСТРОГО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

В.П. Буриченко

Лаборатория теории и приложений конечных групп Института математики НАН Беларуси,
Кирова 32а, 246000 Гомель, Беларусь, vpburich@gmail.com

Рассматриваются билинейные алгоритмы быстрого умножения матриц, типа алгоритма Штрассена. Через $r(m,n,p)$ обозначаем минимальное число умножений (билинейную сложность), необходимое для умножения $m \times n$ матрицы на $n \times p$ матрицу. Известны следующие оценки (справедливые для любого основного поля):
$r(2,2,2) = 7$, $r(2,2,3) = 11$, $r(2,2,4) = 14$, $r(2,2,n) \geqslant 3n+2$ при $n \geqslant 5$, $r(3,2,3) \in \{14,15\}$, $19 \leqslant$ $\leqslant r(3,3,3) \leqslant 23$.
(Все ссылки на эти результаты, а также дальнейшие литературные указания, могут быть найдены в [1] и [2], а в настоящем тезисе нам пришлось их опустить из-за ограничения объема).

Теорема 1 ([1]). $r(3,2,3) = 15$.

В [2] автором было введено понятие о симметриях алгоритмов матричного умножения, и предложено для поиска новых коротких алгоритмов изучать алгоритмы с достаточно большой группой симметрий (определение группы автоморфизмов алгоритма см. ниже). В дальнейшем эта идея получила развитие в работах ряда авторов. Для реализации такого подхода желательно заранее выяснить, как может выглядеть группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ искомого алгоритма (например, гипотетического алгоритма сложности $\leqslant 22$ для умножения 3×3 матриц).

Теорема 2 ([3]). *Если* $\mathcal{A}$ *— алгоритм билинейной сложности* $\leqslant 22$ *для умножения двух* 3×3 *матриц, то* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *изоморфна подгруппе в* $S_{22} \times S_3$.

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *не содержит подгрупп порядка* 17 *или* 19.
(готовится к печати).