

УДК 512. 542

К ПРОБЛЕМЕ КЕГЕЛЯ—ШЕМЕТКОВА О РЕШЕТКАХ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, С. Ф. КАМОРНИКОВ

Введение

Х. Виланд [1] получил широко известный результат о том, что множество всех субнормальных подгрупп является подрешеткой решетки всех подгрупп в любой конечной группе. Р. Картер и Т. О. Хоукс [2], используя формационный подход, предложили более общее понятие $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы. Л. А. Шеметков в [3] под номером 12 поставил следующую проблему: "В каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп группы G образует решетку?" В несколько другой редакции она вошла в "Коуровскую тетрадь" [4, проблема 9.75].

С другой стороны, развивая упомянутый выше результат Х. Виландта, О. Х. Кегель [5] ввел понятие $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппы и доказал, что множество всех $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп образует решетку в любой конечной группе, если $\mathfrak{F}$ — наследственная, замкнутая относительно расширений формация. Там же Кегель сформулировал задачу о том, чтобы найти другие классы $\mathfrak{F}$ с этим свойством.

В [6] была установлена эквивалентность задач Л. А. Шеметкова и О. Х. Кегеля для локальных наследственных формаций, а также получено конструктивное описание всех локальных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных ($\mathfrak{F}$ -достижимых) подгрупп образует решетку в каждой конечной группе. Частный случай этой задачи был рассмотрен в [7].

При доказательстве основных результатов в [6, 7] существенную роль играло требование локальности формации. В настоящей работе предлагается другой подход, который позволяет получить конструктивное описание всех разрешимых наследственных (а не только локальных) формаций с отмеченными выше решеточными свойствами. Цель работы — доказать, что имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная формация. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) множество всех $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп образует решетку в любой группе;
- 2) множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп образует решетку в любой группе;
- 3) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{F} = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i} \right)$ и, кроме того, $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для всех тех $i \in I$, для которых $|\pi_i| > 1$.

§ 1. Предварительные сведения

В работе рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения из теории формаций стандартны и содержатся в [3, 8]. Напомним некоторые из них, существенные для данной работы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Если G — группа, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Подгруппа H группы G называется:

- 1) $\mathfrak{F}$ -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$ такая, что $H_{j-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j$ для всех $j = 1, \dots, n$ (обозначается $Hsn_{\mathfrak{F}}G$);
- 2) $\mathfrak{F}$ -достижимой, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$ такая, что либо подгруппа H_i субнормальна в H_{i-1} , либо $H_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для любого $i = 1, \dots, m$ (обозначается $Hrn_{\mathfrak{F}}G$).

Нам потребуются некоторые известные свойства $\mathfrak{F}$ -субнормальных и $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп, которые приводятся в следующих леммах.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $Hsn_{\mathfrak{F}}G$;
- 2) если $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ ($Hrn_{\mathfrak{F}}G$), K — подгруппа из G , то $(H \cap K)sn_{\mathfrak{F}}K$ (соответственно $(H \cap K)rn_{\mathfrak{F}}K$);
- 3) если подгруппы H_1 и H_2 являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными ($\mathfrak{F}$ -достижимыми) в G , то подгруппа $H_1 \cap H_2$ будет $\mathfrak{F}$ -субнормальной (соответственно $\mathfrak{F}$ -достижимой) в G ;
- 4) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной;
- 5) если $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ ($Hrn_{\mathfrak{F}}G$), то $H^xsn_{\mathfrak{F}}G$ (соответственно $H^xrn_{\mathfrak{F}}G$) для любого $x \in G$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ ($Hrn_{\mathfrak{F}}G$) и $N \triangleleft G$, то $HN/Nsn_{\mathfrak{F}}G/N$ (соответственно $HN/Nrn_{\mathfrak{F}}G/N$);
- 2) если $N \triangleleft G$ и $H/Nsn_{\mathfrak{F}}G/N$ ($H/Nrn_{\mathfrak{F}}G/N$), то $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ (соответственно $Hrn_{\mathfrak{F}}G$);
- 3) если $Hsn_{\mathfrak{F}}K$ ($Hrn_{\mathfrak{F}}K$) и $Ksn_{\mathfrak{F}}G$ ($Krn_{\mathfrak{F}}G$), то $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ (соответственно $Hrn_{\mathfrak{F}}G$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО лемм 1.1, 1.2 осуществляется непосредственной проверкой.

Если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times \dots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для $i = 1, \dots, t$, а через $E\mathfrak{X}$ — класс всех групп, обладающих субнормальными рядами с факторами из $\mathfrak{X}$.

Легко устанавливается следующая

ЛЕММА 1.3. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство клас-

сов групп. Если $\mathfrak{X}_i$ — наследственная формация для любого $i \in I$ и $\pi(\mathfrak{X}_i) \cap \pi(\mathfrak{X}_j) = \emptyset$, для $i \neq j \in I$, то класс $D_0\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i\right)$ также является наследственной формацией.

Нам понадобится следующий результат, вытекающий из [6, теор. 1 и 2].

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая локальная наследственная формация. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) множество всех $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп образует решетку в каждой группе;
- 2) множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп образует решетку в каждой группе;
- 3) $\mathfrak{F} = D_0\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\right)$, где $\bigcup_{i \in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_l \cap \pi_k = \emptyset$ для любых $k \neq l$ из I .

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой называется группа, у которой любая подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$, но сама группа в $\mathfrak{F}$ не входит. Через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп. Важную роль в задачах классификации формаций играют формации с $\mathfrak{S}$ -условием Шеметкова, т. е. формации, у которых любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Такие формации называют $\check{S}$ -формациями. Нам понадобятся следующие два результата о $\check{S}$ -формациях.

ТЕОРЕМА 1.2 [9]. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная $\check{S}$ -формация. Тогда $\mathfrak{F}$ является локальной формацией.

ТЕОРЕМА 1.3 [10]. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая локальная наследственная формация. Она является $\check{S}$ -формацией тогда и только тогда, когда имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$, $f(p) = \emptyset$ для $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ и, кроме того, $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p .

Группа называется примитивной, если она имеет точное примитивное представление. Хорошо известно, что конечная разрешимая группа G примитивна тогда и только тогда, когда ее подгруппа Фиттинга является

минимальной нормальной подгруппой. Согласно [11], группа называется *мультипримитивной*, если каждый ее эпиморфный образ является примитивным. Обозначается класс всех мультипримитивных групп через $\mathfrak{B}^Q$. Нам потребуется следующая

ТЕОРЕМА 1.4 [11]. *Пусть G — конечная разрешимая группа, и $\pi = \pi(G)$. Если $|\pi(G)| > 1$, то в $\mathfrak{B}^Q \cap \mathfrak{S}_\pi$ найдется группа H , которая содержит подгруппу, изоморфную G .*

Зафиксируем еще некоторые обозначения:

$\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех разрешимых π -групп;

$\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π -групп;

$\mathcal{K}(G)$ — совокупность всех композиционных факторов группы G (для единичной группы полагаем $\mathcal{K}(1) = \emptyset$);

$\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \mathcal{K}(G)$ для класса групп $\mathfrak{X}$.

Если H — субнормальная подгруппа группы G и $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_t = H$ — субнормальная цепь с простыми факторами G_{i-1}/G_i , то через $\mathcal{K}(G - H)$ обозначается класс всех тех групп, которые изоморфны факторам этой цепи. При доказательстве основного результата будем использовать теорему Виландта [1]: если H и K — субнормальные подгруппы группы G , то $\mathcal{K}(G - (H \cap K)) = \mathcal{K}(G - H) \cup \mathcal{K}(G - K)$.

§ 2. Доказательство теоремы

Для импликации $1 \Rightarrow 2$ нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если A — $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G , то $A^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A — $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в G , существует максимальная цепь подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_t = A$ такая, что $G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$ для любого $i = 1, \dots, t$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G_i G_{i-1}^{\mathfrak{F}} / G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ для каждого $i = 1, \dots, t$. Из $G_i G_{i-1}^{\mathfrak{F}} / G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \simeq G_i / G_i \cap G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ вытекает, что $G_i^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$, $i = 1, \dots, t$. Далее, из

$G_i^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq G$ и $G_i^{\mathfrak{F}} \triangleleft G_i$ получаем, что $G_i^{\mathfrak{F}} \triangleleft G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ для каждого $i = 1, \dots, t$. Рассмотрим цепь подгрупп $G = G_0 \supseteq G_0^{\mathfrak{F}} \supseteq G_1^{\mathfrak{F}} \supseteq \dots \supseteq G_t^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}$. В этой цепи $G_i^{\mathfrak{F}} \triangleleft G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, \dots, t$. Кроме того, $G_0^{\mathfrak{F}} \triangleleft G$. Следовательно, подгруппа $A^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс простых групп. Тогда $E\mathfrak{X}$ -корадикал группы G совпадает с пересечением всех таких субнормальных подгрупп H группы G , для которых $\mathcal{K}(G - H) \subseteq \mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что класс $E\mathfrak{X}$ является формацией. Пусть N — пересечение всех субнормальных подгрупп H группы G с условием $\mathcal{K}(G - H) \subseteq \mathfrak{X}$. В силу теоремы Виландта имеет место включение $\mathcal{K}(G - N) \subseteq \mathfrak{X}$. Поскольку $\mathcal{K}(G - H) = \mathcal{K}(G - H^x)$ для любого $x \in G$, то N — нормальная подгруппа в G . Значит, $G/N \in E\mathfrak{X}$. Последнее означает, что $G^{E\mathfrak{X}} \subseteq N$. Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация и $\mathfrak{H} = E\mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Тогда для любой $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы A группы G выполняется равенство $A^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению существует максимальная цепь подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_t = A$ такая, что $G_i \supseteq G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, \dots, t$. Поскольку $G_{i-1}/G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и в силу наследственности $\mathfrak{F}$, имеем $G_i/G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \dots, t$. Отсюда $G_i^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, \dots, t$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, наследственной является и формация $\mathfrak{H}$. Кроме того, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому из $G_i/G_{i-1}^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$ и $G_i^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ следует, что $G_{i-1}^{\mathfrak{F}}/G_i^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Значит, на участке от $A^{\mathfrak{H}}$ до G все композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{F}$. Кроме того, по лемме 2.1 подгруппа $A^{\mathfrak{H}}$ субнормальна в G . Отсюда и в силу леммы 2.2, $G^{\mathfrak{H}} \subseteq A^{\mathfrak{H}}$. Обратное включение $A^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$ следует из наследственности $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, $G \in E\mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Соотношение $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется $Hrn_{\mathfrak{F}}G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Hsn_{\mathfrak{F}}G$, то $Hrn_{\mathfrak{F}}G$.

Пусть теперь $Hrn_{\mathfrak{F}}G$. Тогда существует цепь подгрупп $G = G_0 \supseteq \dots \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = H$, в которой для любого $i = 1, \dots, t$ либо $G_i \triangleleft G_{i-1}$,

либо $G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$. Уплотним участок от G_i до G_{i-1} указанной цепи до максимальной $(G_{i-1} - G_i)$ -цепи. В силу п. 3 леммы 1.2 все подгруппы из G_{i-1} , содержащие G_i , $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G_{i-1} . Пусть теперь $G_i \triangleleft G_{i-1}$. Можно считать, что G_i — максимальная нормальная подгруппа группы G_{i-1} (в противном случае уплотняем участок между G_i и G_{i-1} до композиционной $(G_{i-1} - G_i)$ -цепи). По условию леммы, $G_{i-1}/G_i \in \mathfrak{F}$, т. е. $G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$, этот случай уже рассмотрен. Теперь, по п. 3 леммы 1.2, $Hsn_{\mathfrak{F}}G$. Лемма доказана.

Обратимся непосредственно к доказательству теоремы и покажем, что имеет место импликация $1 \Rightarrow 2$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то в силу п. 3 леммы 1.1 достаточно показать, что порождение любых двух $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп снова является $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппой.

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой это неверно, а N — минимальная нормальная подгруппа в G . Если U и V — $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы G , то подгруппы UN/N и VN/N будут $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G/N . Так как $|G/N| < |G|$, то по индукции $\langle U, V \rangle N / N sn_{\mathfrak{F}} G / N$. Отсюда и по п. 2 леммы 1.2, $\langle U, V \rangle N sn_{\mathfrak{F}} G$.

Пусть $\mathfrak{H} = EK(\mathfrak{F})$. По лемме 2.3, $U^{\mathfrak{H}} = V^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}$. Если $G \notin \mathfrak{H}$, то, взяв N в $G^{\mathfrak{H}}$, получим равенство $\langle U, V \rangle = \langle U, V \rangle N$, и тем самым получаем противоречие. Значит, $G \in \mathfrak{H}$. В этом случае доказываемое утверждение следует из леммы 2.4. Импликация $1 \Rightarrow 2$ теоремы доказана.

Для доказательства импликации $2 \Rightarrow 3$ нам потребуется определить несколько понятий и доказать ряд утверждений, каждое из которых представляют самостоятельный интерес. Если $\mathfrak{F}$ — формация, то через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп группы G , а через $S_n(G)$ — множество всех ее нормальных подгрупп.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если $1sn_{\mathfrak{F}}G$, то $S_n(G) \subseteq sn_{\mathfrak{F}}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1sn_{\mathfrak{F}}G$ и $N \triangleleft G$. В силу п. 2 леммы 1.2 имеем $Nsn_{\mathfrak{F}}G$. Лемма доказана.

Далее множество всех субнормальных подгрупп группы G обозначим через $sn(G)$, а множество всех ее подгрупп — через $S(G)$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если $1sn_{\mathfrak{F}}G$, то все субнормальные подгруппы группы G являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G . В частности, если G нильпотентна и $1sn_{\mathfrak{F}}G$, то $sn_{\mathfrak{F}}(G) = S(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется. Пусть $H \in sn(G)$ и H не является $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G . Заключим H в максимальную нормальную подгруппу R группы G . По лемме 2.5, $Rsn_{\mathfrak{F}}G$. Из $1sn_{\mathfrak{F}}G$ и п. 2 леммы 1.1 следует, что $1sn_{\mathfrak{F}}R$. В силу выбора G заключаем, что $Hsn_{\mathfrak{F}}R$. Из п. 3 леммы 1.2 вытекает, что $Hsn_{\mathfrak{F}}G$, получаем противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, Z_p — циклическая группа порядка p , для которой $1sn_{\mathfrak{F}}Z_p$. Тогда $sn_{\mathfrak{F}}(P) = S(P)$ для любой p -группы P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1sn_{\mathfrak{F}}Z_p$. Докажем, что $1sn_{\mathfrak{F}}P$ для любой p -группы P . Предположим противное. Пусть P — группа наименьшего порядка, для которой $1 \notin sn_{\mathfrak{F}}(P)$, M — максимальная нормальная подгруппа группы P . Так как $|M| < |P|$, то $1sn_{\mathfrak{F}}M$. Так как $|P/M| = p$, то $1 = M/Msn_{\mathfrak{F}}P/M \simeq Z_p$. Отсюда $Msn_{\mathfrak{F}}P$. Из $1sn_{\mathfrak{F}}M$ и п. 3 леммы 1.2 получаем, что $1sn_{\mathfrak{F}}P$. По лемме 2.6, $sn_{\mathfrak{F}}(P) = S(P)$. Лемма доказана.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ обозначается класс всех тех групп G , у которых любая подгруппа является $\mathfrak{F}$ -субнормальной. В дальнейшем будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — решеточная формация, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп.

ЛЕММА 2.8. Если $\mathfrak{F}$ — наследственная решеточная формация, то класс групп $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ является наследственной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и N — нормальная подгруппа группы G . Если H/N — подгруппа группы G/N , то из $Hsn_{\mathfrak{F}}G$ и п. 1 леммы 1.2 следует, что $H/Nsn_{\mathfrak{F}}G/N$. Так как подгруппа H/N выбрана произвольно, то $sn_{\mathfrak{F}}(G/N) = S(G/N)$, т. е. $G/N \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ — гомоморф.

Пусть теперь N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G такие, что

$N_1 \cap N_2 = 1$ и $G/N_i \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, $i = 1, 2$. Если P — силовская подгруппа группы G , то из условия леммы следует, что $PN_i/N_i sn_{\mathfrak{F}}G/N_i$, $i = 1, 2$. По п. 2 леммы 1.2 получаем, что $PN_i sn_{\mathfrak{F}}G$, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и в силу п. 3 леммы 1.1, имеем $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P sn_{\mathfrak{F}}G$. Из $N_i/N_i sn_{\mathfrak{F}}G/N_i$ следует, что $N_i sn_{\mathfrak{F}}G$, $i = 1, 2$. Значит, $1 = (N_1 \cap N_2) sn_{\mathfrak{F}}G$. По п. 2 леммы 1.1, $1 sn_{\mathfrak{F}}P$. Из леммы 2.5 и п. 3 леммы 1.2 вытекает, что $S(P) \subseteq sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Любая подгруппа порождается своими примарными подгруппами и формация $\mathfrak{F}$ является решеточной, поэтому $sn_{\mathfrak{F}}(G) = S(G)$. Таким образом, $G/N_1 \cap N_2 \simeq G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и класс $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ является формацией.

Установим наследственность формации $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, и H — подгруппа из G . Если K — произвольная подгруппа из H , то, учитывая включение $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, имеем $K sn_{\mathfrak{F}}G$. По п. 2 леммы 1.1, $K = (K \cap H) sn_{\mathfrak{F}}H$. Отсюда $H \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ — наследственная формация. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная решеточная формация. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$ и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $sn_{\mathfrak{F}}(G) = S(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, а значит, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. Пусть $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. По лемме 2.8, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ — наследственная формация. Значит, $Z_p \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, где Z_p — группа простого порядка p , $p \in \pi(G)$. Тогда $sn_{\mathfrak{F}}(Z_p) = S(Z_p)$, т. е. $1 sn_{\mathfrak{F}}Z_p$. Отсюда $Z_p^{\mathfrak{F}} = 1$, поэтому $Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi(G)$. Следовательно, $\pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F})$. В силу леммы 2.7, $sn_{\mathfrak{F}}(P) = S(P)$ для любой p -группы P , а значит, $P \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ — формация, она замкнута относительно прямых произведений с конечным числом сомножителей. Значит, $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.10. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная решеточная формация. Включение $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $1 sn_{\mathfrak{F}}(G)$ и $P sn_{\mathfrak{F}}(G)$ для любой силовской подгруппы P группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 sn_{\mathfrak{F}}(G)$ и $P sn_{\mathfrak{F}}(G)$ для любой силовской подгруппы P группы G . Из $1 sn_{\mathfrak{F}}G$ и п. 2 леммы 1.1 следует, что $1 = (1 \cap P) sn_{\mathfrak{F}}P$. По лемме 2.7, $sn_{\mathfrak{F}}(P) = S(P)$ для любой силовской под-

группы группы G . Отсюда и из п. 3 леммы 1.2 следует, что $S(P) \subseteq sn_{\mathfrak{F}}(G)$ для любой силовой подгруппы P из G . Пусть H — произвольная подгруппа из G . Так как H порождается своими силовскими подгруппами, в силу решеточности $\mathfrak{F}$ и теоремы Силова, получаем, что $Hsn_{\mathfrak{F}}G$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.11. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная решеточная формация. Предположим, что $G = [P]\langle A, B \rangle$, где P — p -подгруппа, $\langle A, B \rangle$ — q -подгруппа группы G , а p и q — различные простые числа. Если $PA \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и $PB \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, то $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа $G = [P]\langle A, B \rangle$ удовлетворяет условию леммы. Тогда P — силовая p -подгруппа, а $\langle A, B \rangle$ — силовая q -подгруппа группы G соответственно. Из $PA \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и наследственности $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ следует, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. В силу леммы 2.7, $P \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и $\langle A, B \rangle \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

Из $G/P \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ следует, что $AP/Psn_{\mathfrak{F}}G/P$. Отсюда $APsn_{\mathfrak{F}}G$. Из $AP \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ вытекает, что $Psn_{\mathfrak{F}}AP$ и $Asn_{\mathfrak{F}}AP$. По п. 3 леммы 1.2, $Asn_{\mathfrak{F}}G$ и $Psn_{\mathfrak{F}}G$. Аналогично, $Bsn_{\mathfrak{F}}G$. Поскольку $\mathfrak{F}$ решеточная, получаем, что $\langle A, B \rangle sn_{\mathfrak{F}}G$. Теперь результат следует из леммы 2.10. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.12. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная решеточная формация, и R — p -замкнутая $\{p, q\}$ -группа Шмидта, причем $\Phi(R) = 1$. Если $R \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ содержит все расширения p -групп с помощью циклических q -групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что существует единственная (с точностью до изоморфизма) p -замкнутая $\{p, q\}$ -группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини. Поэтому $R = [N]Z_q$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа в R , являющаяся силовой p -подгруппой в R , а Z_q — подгруппа простого порядка q .

Вначале докажем, что формация $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ содержит все расширения p -групп с помощью групп простого порядка q . Рассмотрим группу $G = = PZ_q$, где P — p -группа и $P \triangleleft G$. Индукцией по порядку группы G докажем, что $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим случай, когда $Z_q \triangleleft G$. Тогда $G = P \times Z_q$. Из $R \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и наследственности класса $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ следует, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. По лемме 2.9,

$\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. Значит, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что подгруппа Z_q не является нормальной в G .

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G . Предположим, что $K \neq P$. Ясно, что $K \subseteq P$ и $KZ_q \neq G$. По индукции, $G/K \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Поэтому $Z_qK/K \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}G/K$. Отсюда $KZ_q \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}G$. Так как $|KZ_q| < |G|$, то $KZ_q \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Отсюда $Z_q \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}G$. Из $G/P \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ вытекает, что $P/P \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Значит, $P \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}G$. Таким образом, любая силовская подгруппа из G содержится в $\text{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$. Применяя лемму 2.10, получаем, что $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

Будем считать далее, что $K = P$. Тогда G является группой Шмидта и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ по условию. Итак, всякое расширение p -группы с помощью групп простого порядка q принадлежит формации $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

Пусть теперь G — расширение p -группы с помощью циклической группы порядка q^n . Тогда группу G можно представить в виде $G = PZ_{q^n}$, где P — p -группа, $P \triangleleft G$ и Z_{q^n} — циклическая q -группа.

Докажем индукцией по n , что $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Как показано выше, утверждение для $n = 1$ выполняется. Пусть $n > 1$. Рассмотрим группу $E = Pwr(Z_qwrZ_{q^{n-1}})$. По [8, теор. 18.9] группа G изоморфна некоторой подгруппе из E . Пусть B — база сплетения $Z_qwrZ_{q^{n-1}}$. Тогда $Z_qwrZ_{q^{n-1}} = [B]Z_{q^{n-1}}$. Обозначим через P^* силовскую p -подгруппу группы E . Тогда $E = [P^*]([B]Z_{q^{n-1}})$. Так как $E/P^* \simeq [B]Z_{q^{n-1}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, то $P^*Z_{q^{n-1}}/P^*\text{sn}_{\mathfrak{F}}E/P^*$. Отсюда $P^*Z_{q^{n-1}} \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}E$. По индукции, $P^*Z_{q^{n-1}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Поэтому $Z_{q^{n-1}} \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}P^*Z_{q^{n-1}}$ и $P^*\text{sn}_{\mathfrak{F}}P^*Z_{q^{n-1}}$. В силу п. 3 леммы 1.2 получаем, что $Z_{q^{n-1}} \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}E$ и $P^*\text{sn}_{\mathfrak{F}}E$.

Аналогично, $P^*B/P^*\text{sn}_{\mathfrak{F}}E/P^*$. Отсюда $P^*B \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}E$. Так как $B \simeq Z_q \times \cdots \times Z_q$, по предположению индукции (случай $n = 1$) и лемме 2.9, нетрудно видеть, что $P^*B \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Тогда $B \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}P^*B$. Из п. 3 леммы 1.2 следует, что $B \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}E$. Так как $\mathfrak{F}$ — решетчатая формация, $\langle B, Z_{q^{n-1}} \rangle = [B]Z_{q^{n-1}} \leq \text{sn}_{\mathfrak{F}}E$. По лемме 2.10, $E \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Из наследственности класса $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.13. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация. Если $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$, то $G^{\mathfrak{X}}$ является примарной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$. Предположим, что группа G нильпотентна. Если G не является примарной, то из $\mathfrak{X} = D_0\mathfrak{X}$ и строения G следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X})$. Следовательно, G — примарная группа и заключение леммы в этом случае выполняется.

Пусть группа G не является нильпотентной. Тогда $F(G) \neq G$. Согласно [8, п. "с" теор. 10.6], $\Phi(G)$ — собственная подгруппа из $F(G)$, поэтому найдется простое число $p \in \pi(F(G))$ и силовская p -подгруппа P из $F(G)$ такая, что $P \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда $G = PM$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G . Из $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X})$ вытекает, что $M \in \mathfrak{X}$, а значит, $G/P \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{X}} \subseteq P$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.14. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная решеточная формация. Тогда формация $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ является локальной наследственной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная решеточная формация. По лемме 2.8 класс $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ является наследственной формацией. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ состоит из разрешимых групп. Установим локальность $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}) \cap \mathfrak{S}$. Если группа G нильпотентна, то G является p -группой, где p — некоторое простое число. В силу леммы 2.9, $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. Поэтому G — группа простого порядка p , где $p \notin \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$.

Пусть группа G не является нильпотентной. По лемме 2.13 $G^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}}$ является p -группой, где p — некоторое простое число. Обозначим $G^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}} = N$.

Предположим вначале, что $NS \neq G$ для любой силовской подгруппы S группы G . Из $G/N \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ следует, что $SN/Nsn_{\mathfrak{F}}G/N$. Отсюда $SNsn_{\mathfrak{F}}G$. Так как $SN \neq G$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$, то $SN \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, а значит, $SNsn_{\mathfrak{F}}SN$. Отсюда и из п. 3 леммы 1.2, $SNsn_{\mathfrak{F}}G$. Так как группа G не является нильпотентной, она не будет и примарной. По лемме 2.10, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие с условием $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$.

Пусть $G = NS$ для некоторой силовской подгруппы S группы G . Поскольку G не является нильпотентной, S — q -группа, где q — некоторое простое число, отличное от p . Следовательно, G является p -замкнутой

$\{p, q\}$ -группой. Если S не является циклической группой, то $S = \langle A, B \rangle$, где A и B — различные собственные подгруппы из S . Учитывая, что $NA \neq G$ и $NB \neq G$, имеем $NA \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и $NB \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. По лемме 2.9, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Снова пришли к противоречию с условием $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$.

Значит, S — циклическая q -группа. Так как группа G не является нильпотентной, в G найдется подгруппа H , которая является группой Шмидта. Из p -замкнутости группы G следует p -замкнутость подгруппы H . Пусть вначале H — собственная подгруппа в G . Так как $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} = Q\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, то $H/\Phi(H) \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. По лемме 2.12, $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, получаем противоречие. Поэтому остается только случай, когда G — группа Шмидта.

Итак, любая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}) \cap \mathfrak{S}$ является либо группой Шмидта, либо имеет простой порядок. Применяя теорему 1.1, получаем локальность формации $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.15. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная решеточная формация. Тогда $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \right)$, где $\bigcup_{i \in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$ и $\pi_l \cap \pi_k = \emptyset$ для всех $l \neq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.14 следует, что класс $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ является локальной наследственной $\check{S}$ -формацией. По теореме 1.2, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$, $f(p) = \emptyset$ для $p \in \pi'(\mathfrak{F})$ и, кроме того, $f(p) = \mathfrak{N}_p(f(p))$ для любого простого p .

Если $\pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}) = \{p\}$, то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_p$. В этом случае утверждение леммы выполняется.

Пусть $|\pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})| > 1$, и p, q — некоторые различные простые числа из $\pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. Предположим, что $q \in \pi(f(p))$. Докажем включение $p \in \pi(f(q))$. Допустим противное, т. е. $p \notin \pi(f(q))$. Рассмотрим точный неприводимый $F_p[Z_q]$ -модуль U над полем F_p из p элементов. Этот модуль существует по [8, теор. 10.3]. Рассмотрим группу $E = UZ_q$. Нетрудно видеть, что $E \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Так как $O_q(E) = 1$, U — единственная минимальная нормальная подгруппа группы E и по [8, теор. 10.3], существует точный неприводимый $F_q[E]$ -модуль W над полем F_q . Рассмотрим группу $F = [W]E = [W]([U]Z_q)$. Поскольку W — минимальная нормальная подгруппа в

F и $W \cap E = 1$, то E — максимальная подгруппа группы F . Так как $C_F(W) = F_q(F) = W$ и $F/W \notin f(q)$, имеем $F \notin \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Ясно, что $F^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}} = W$.

Из построения F следует, что в F имеется точно три класса максимальных подгрупп: $H_1 = E$, $H_2 = [W]Z_q$ и $H_3 = [W]U$. Из $F/W \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ следует, что $H_i/W \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} F/W$, $i = 2, 3$. Отсюда $H_i \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} F$, $i = 2, 3$. Покажем, что $H_1 \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} F$. Поскольку $N_E(Z_q) = Z_q$, найдется $x \in E$, для которого $Z_q \neq Z_q^x$. Тогда $E = \langle Z_q, Z_q^x \rangle$. Из $F/W \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ вытекает, что $Z_q W/W \in \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}}(F/W)$. Отсюда $Z_q W \in \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}}(F)$. Так как $Z_q W$ — примарная q -группа, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ — локальная формация и $q \in \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$, то $Z_q W \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Значит, $Z_q \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} Z_q W$. В силу п. 3 леммы 1.2, $Z_q \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} E$, а значит, $Z_q^x \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} E$. Тогда $E = \langle Z_q, Z_q^x \rangle \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} F$. Таким образом, $H_i \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} F$ для $i = 1, 2, 3$. Поэтому силовские подгруппы H_2 и $H_1 \cap H_3$ группы F входят в $\operatorname{sn}_{\mathfrak{F}}(F)$. По лемме 2.10 имеем $F \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, получаем противоречие. Итак, из $q \in \pi(f(p))$ следует, что $p \in \pi(f(q))$.

Воспользуемся полученным свойством экрана f для доказательства более сильного утверждения: если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$, что влечет $f(p) = f(q)$. Пусть $r \neq q$ и $r \in \pi(f(p)) \setminus \pi(f(q))$. Рассмотрим точный неприводимый $F_r[Z_p]$ -модуль V над полем F_r . Возьмем группу $X = [V]Z_p$. Так как $r \in \pi(f(p))$, то $r \in \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. Используя доказанное выше утверждение, получаем, что $p \in \pi(f(r))$. Пусть L — точный неприводимый $F_q[X]$ -модуль над полем F_q . Рассмотрим группу $G = [L]([V]Z_p)$. Она не принадлежит формации $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, так как $G/F_p(G) \simeq [V]Z_p \notin f(q)$. Ясно, что $L = G^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}}$. В G имеется точно три класса максимальных подгрупп: $M_1 = [V]Z_p$, $M_2 = [L]V$ и $M_3 = [L]Z_p$. Рассуждая как и выше, можно доказать, что $M_i \operatorname{sn}_{\mathfrak{F}} G$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, получаем противоречие. Таким образом, если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$. Из строения экрана f следует, что $f(p) = f(q)$. Более того, если найдется простое число $r \in \pi(f(p)) \cap \pi(f(q))$, то также $f(p) = f(q)$.

Итак, для любых простых p и q либо $f(p) = f(q)$, либо $f(p) \cap f(q) = \emptyset$. Поэтому существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$ в объединение попарно непересекающихся подмножеств, т. е. $\pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}) = \bigcup_{i \in I} \pi_i$, где $\pi_l \cap \pi_k = \emptyset$ для любых $l \neq k$ из I , причем $p, q \in \pi_i$ тогда и только тогда, когда $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$.

Обозначим $\mathfrak{X}^* = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \right)$. Докажем, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Из полученных выше свойств экрана f следует, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, т. е. f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} = D_0 \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, то $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Предположим, что множество $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} \setminus \mathfrak{X}^*$ не пусто, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} \setminus \mathfrak{X}^*$. По лемме 2.14, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ — локальная формация, поэтому в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N = G^{\mathfrak{X}^*}$, причем N — p -группа, $N = F_p(G)$ и $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G , принадлежащая $\mathfrak{X}^*$. Поскольку $G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$, то $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in f(p)$, т. е. $\pi(M) \subseteq \pi(f(p))$. Тогда $G \in f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Из построения формации $\mathfrak{X}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{X}^*$, получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{X}^*$. Лемма доказана.

Докажем теперь импликацию $2 \Rightarrow 3$ теоремы. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная решеточная формация. В силу леммы 2.9, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$ и $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{X}_{\mathfrak{F}})$. Отсюда и из леммы 2.15 следует, что $\mathfrak{F} = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i} \right)$, где $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_{\pi_i}$, $\bigcup \pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_l \cap \pi_k = \emptyset$ для всех $l \neq k \in I$. Пусть $i \in I$ такой номер, что $|\pi_i| > 1$. Покажем, что $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Для этого докажем равенство $\mathfrak{B}^Q \cap \mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{B}^Q \cap \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Будем использовать индукцию по длине n главного ряда мультипримитивной группы. Пусть $n = 1$. Тогда из наследственности $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ и $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi(\mathfrak{S}_{\pi_i})$ следует, что $Z_p \in \mathfrak{F}_{\pi_i}$, если $Z_p \in \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Предположим, что утверждение выполняется для n . Докажем его для групп длины $n + 1$. Пусть G — мультипримитивная группа длины $n + 1$ и $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Тогда $G = [N]M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и M — мультипримитивная группа длины n . Так как $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i}$, то $M \in \mathfrak{S}_{\pi_i}$, а значит, по предположению индукции, $M \in \mathfrak{F}_{\pi_i}$. Если $G \notin \mathfrak{F}_{\pi_i}$, то $N = G^{\mathfrak{F}_{\pi_i}}$, а значит, M является $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ -абнормальной подгруппой в G . С другой стороны, $\mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{F}}$. Отсюда $M \in sn_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G) = sn_{\mathfrak{F}}(G) = S(G)$, получаем противоречие. Итак, $\mathfrak{B}^Q \cap \mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{B}^Q \cap \mathfrak{S}_{\pi_i}$. По теореме 1.3 и из того, что формация $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ наследственна, следует $\mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}_{\pi_i}$, а значит, $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Импликация $2 \Rightarrow 3$ доказана.

Для доказательства импликации $3 \Rightarrow 1$ нам потребуется следующая

ЛЕММА 2.16. Пусть π — непустое множество простых чисел, $\{\pi_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества π на попарно непересекающиеся подмножества. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, для которых выполняются следующие условия:

- 1) $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{H}) = \pi$;
- 2) $\mathfrak{F} = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i} \right)$, где $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для всех $i \in I$ с условием $|\pi_i| > 1$;
- 3) $\mathfrak{H} = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \right)$.

Подгруппа H будет $\mathfrak{F}$ -достижима в группе G тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{H}$ -достижима в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то из $\mathfrak{F}$ -достижимости подгруппы H в G следует ее $\mathfrak{H}$ -достижимость.

Пусть теперь H — $\mathfrak{H}$ -достижимая подгруппа группы G . По определению существует цепь $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = H$, в которой для любого $i = 1, 2, \dots, t$ либо подгруппа G_i нормальна в G_{i-1} , либо $G_{i-1}^{\mathfrak{H}} \subseteq G_i$. Исходя из соображений индукции, можно считать, что подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в G_1 . Если $G_1 \triangleleft G$, то подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

Пусть $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G_1$. Формация $\mathfrak{H}$ наследственна, и, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что G_1 — максимальная подгруппа группы G . Из строения формации $\mathfrak{H}$ следует, что $G/G^{\mathfrak{H}} = H_1/G^{\mathfrak{H}} \times H_2/G^{\mathfrak{H}} \times \dots \times H_k/G^{\mathfrak{H}}$, где $H_j/G^{\mathfrak{H}}$ — холловская π_{i_j} -подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{H}}$, $i_j \in I$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Так как подгруппа G_1 максимальна в группе G и в силу разрешимости формации $\mathfrak{H}$, $|G : G_1| = p^\alpha$ для некоторого простого p . Будем считать, что $p \in \pi_{i_1}$. По теореме Холла, $H_2 \dots H_k \subseteq G_1$. Простая проверка показывает, что $H_2 \dots H_k = G^{\mathfrak{H}\pi_1}$. Значит, G_1 — $\mathfrak{H}_{\pi_1}$ -нормальная максимальная подгруппа группы G . Если $|\pi_1| > 1$, то $\mathfrak{H}_{\pi_1} = \mathfrak{F}_{\pi_1} = \mathfrak{S}_{\pi_1}$. Отсюда G_1 — $\mathfrak{F}$ -нормальная максимальная подгруппа группы G , а значит, подгруппа H будет $\mathfrak{F}$ -достижима в G .

Пусть $|\pi_1| = 1$. Тогда G_1 — нормальная максимальная подгруппа группы G , и G/G_1 — группа порядка p . Так как $Z_p \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$, подгруппа G_1

является $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ -нормальной в G , а значит, подгруппа H будет $\mathfrak{F}$ -достижима в G . Лемма доказана.

Докажем импликацию $3 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация такая, что $\mathfrak{F} = D_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i} \right)$, где $\pi_l \cap \pi_k = \emptyset$ для $l \neq k \in I$ и $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$, если $|\pi_i| > 1$. В силу теоремы П. Неймана формация $\mathfrak{F}$ наследственна. Рассмотрим формацию $\mathfrak{H}$, описанную в лемме 2.16. По теореме 1.1 в каждой группе G все $\mathfrak{H}$ -достижимые подгруппы образуют решетку. По лемме 2.16 и все $\mathfrak{F}$ -достижимые подгруппы в каждой группе образуют решетку. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Wielandt*, Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, *Math. Z.*, **45** (1939), 209—244.
2. *R. Carter, T. O. Hawkes*, The $\mathfrak{F}$ -normalizers of a finite soluble group, *J. Algebra*, **5**, N 2 (1967), 175—202.
3. *Л. А. Шеметков*, Формации конечных групп, М., Наука, 1978.
4. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 12-е изд., Новосибирск, 1992.
5. *O. H. Kegel*, Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten, *Arch. Math.*, **30**, N 3 (1978), 225—228.
6. *А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, В. Н. Семенчук*, О решетках подгрупп конечных групп, в сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы", Киев, Ин-т матем. АН Украины, 1993, 27—54.
7. *A. Ballester-Bolínches, K. Doerk, M. D. Perez-Ramos*, On the lattice of $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups, *J. Algebra*, **148**, N 2 (1992), 42—52.
8. *K. Doerk, T. O. Hawkes*, Finite Soluble Groups, Berlin—New York, Walter de Gruyter, 1992.
9. *А. Н. Скиба*, Об одном классе локальных формаций конечных групп, Докл. АН БССР, **34**, N 11 (1990), 382—385.
10. *В. Н. Семенчук, А. Ф. Васильев*, Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп, в сб. "Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп", Минск, Наука и техника, 1984, 175—181.

11. *T.O.Hawkes*, Two applications of twisted wreath products to finite soluble groups, Trans. Am. Math. Soc., **214**, N 3 (1975), 325—335.

Адреса авторов:

Поступило 30 ноября 2000 г.

Окончательный вариант 28 февраля 2001 г.

ВАСИЛЬЕВ

КАМОРНИКОВ

Александр Федорович,

Сергей Федорович,

БЕЛАРУСЬ,

БЕЛАРУСЬ,

246028, г. Гомель,

246028, г. Гомель,

ул. Советская, 106, кв. 156.

ул. Советская, 106, кв. 150,

Тел.: 57-37-91 (с.), 57-48-47 (д.).

Тел.: 56-74-10 (с.), 57-32-77 (д.).

e-mail: vasiljev@gsu.unibel.by

e-mail: kamornikov@gsu.unibel.by