А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп, *Сиб. матем. журн.*, 2001, том 42, номер 1, 30–40

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512.542

О ФУНКТОРНОМ МЕТОДЕ ИЗУЧЕНИЯ РЕШЕТОК ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников

Аннотация: Предлагается функторный подход к развитию результата Виландта о решетке субнормальных подгрупп конечных групп. На основе аксиоматизации свойств субнормальных подгрупп в работе вводится понятие естественного транзитивного решеточного функтора и описываются все решетки, индуцируемые такими функторами в конечных разрешимых группах. Библиогр. 10.

Введение

Хорошо известно, что множество всех нормальных подгрупп образует решетку в любой группе. В 1939 г. Виландт [1] установил, что таким свойством обладает также множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе. Развивая этот результат, Кегель в 1978 г. в работе [2] ввел понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы и доказал, что множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп образует решетку в любой конечной группе, если $\mathfrak{F}$ — наследственная замкнутая относительно расширений формация. Здесь же Кегель поставил задачу нахождения других классов $\mathfrak{F}$ с этим свойством.

Наряду с понятием $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы другим естественным обобщением субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности (см. [3, 4]). В 1978 г. Л. А. Шеметков в [3] под номером 12 поставил следующую проблему. В каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G образует решетку? Эта задача в несколько другой редакции вошла в «Коуровскую тетрадь» [5, проблема 9.75]. В работе [6] установлена эквивалентность задач Кегеля и Шеметкова, а также получено описание всех локальных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных ($\mathfrak{F}$-достижимых) подгрупп образует решетку в каждой конечной группе. Аналогичная задача в классе конечных разрешимых групп рассмотрена в [7].

Несмотря на законченный характер результатов работы [6], остается открытым вопрос о существовании в конечных группах других естественных решеток, аналогичных решетке всех субнормальных подгрупп. В настоящей работе мы предлагаем другой более общий (функторный) подход развития результата Виландта. Аксиоматизируя основные свойства субнормальных подгрупп (инвариантность при гомоморфизмах, транзитивность, наследственность в подгруппах), мы вводим понятие естественного транзитивного решеточного функтора и описываем все решетки, индуцируемые такими функторами в конечных разрешимых группах.

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Пусть A, B — группы, $\phi : A \to B$ — эпиморфизм, и пусть Ω и Σ — некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. В дальнейшем через Ω^{ϕ} обозначается множество $\{H^{\phi} \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\phi^{-1}}$ — множество $\{H^{\phi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Пусть Θ — отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\Theta(G)$ ее подгрупп. Говорят [8], что Θ — *подгрупповой функтор*, если выполняется условие абстрактности:

$$(\Theta(G))^{\phi} = \Theta(G^{\phi})$$

для любого изоморфизма ϕ каждой группы G.

Если H — подгруппа группы G, то через $H \cap \Theta(G)$ обозначается множество $\{H \cap R \mid R \in \Theta(G)\}$.

Подгрупповой функтор Θ будем называть

1) *естественным*, если $(\Theta(A))^{\phi} \subseteq \Theta(B^{\phi})$ и $(\Theta(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \Theta(A)$ для любого эпиморфизма $\phi : A \to B$, а также $H \cap \Theta(G) \subseteq \Theta(H)$ для любой подгруппы H группы G;

2) *транзитивным*, если $\Theta(H) \subseteq \Theta(G)$ для любой подгруппы $H \in \Theta(G)$;

3) *решеточным*, если всегда из $H, K \in \Theta(G)$ следует, что $H \cap K \subseteq \Theta(G)$ и $\langle H, K\rangle \subseteq \Theta(G)$.

Примерами естественных транзитивных решеточных функторов (называемых далее ЕТР-функторами) являются функторы, выделяющие в каждой конечной группе G множество $S(G)$ всех ее подгрупп; множество $\{G\}$; множество $\mathrm{sn}(G)$ всех ее субнормальных подгрупп. Другие примеры ЕТР-функторов получены в [6].

Возникает задача нахождения всех ЕТР-функторов, заданных на группах из данного класса групп $\mathfrak{X}$.

Следующая теорема решает эту задачу в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех разрешимых конечных групп.

Теорема. *Пусть Θ — подгрупповой* ЕТР-*функтор. Тогда*

1) *класс $\mathfrak{X}_{\Theta} = \{G \mid \Theta(G) = S(G)\}$ — наследственная локальная формация;*

2) *существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{X}_{\Theta})$, что $\mathfrak{X}_{\Theta} = D_0(\bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$;*

3) $\Theta(G) = \mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_{\Theta}}(G)$ *для любой группы G.*

2. Предварительные сведения

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Определения и обозначения, связанные с теорией классов, можно найти в [3, 4]. Напомним некоторые из них.

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n = H$ такая, что $K_{j-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq K_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Функтор, сопоставляющий каждой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, будем обозначать через $\mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ и K — подгруппа из G, то $H \cap K \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(K)$;*

2) *если $H \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $K \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H \cap K \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $N \triangleleft G$, то $HN \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$;*
2) *если $H \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $N \triangleleft G$, то $HN/N \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G/N)$;*
3) *если $H \subseteq K, H \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(K)$ и $K \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство лемм 2.1, 2.2 осуществляется непосредственной проверкой.

Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что функтор $\mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}$ является естественным транзитивным подгрупповым функтором в случае, когда $\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ *обладает решеточным свойством*, если функтор $\mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}$ решеточный.

Нам понадобится следующая теорема, устанавливающая строение наследственных локальных формаций, обладающих решеточным свойством.

Теорема 2.1 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, когда $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$, где $\bigcup\limits_{i \in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для любых $k \neq l$ из I.*

Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для $i = 1, 2, \ldots, t$.

Легко устанавливается справедливость следующей леммы.

Лемма 2.3. *Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство классов групп. Если $\mathfrak{X}_i$ — наследственная локальная формация для любого $i \in I$ и $\pi(\mathfrak{X}_i) \cap \pi(\mathfrak{X}_j) = \varnothing$ для $i \neq j \in I$, то класс $D_0(\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{X}_i)$ также является наследственной локальной формацией.*

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то через $M(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, т. е. групп, у которых данному классу $\mathfrak{F}$ принадлежат все собственные подгруппы, и только они. Важную роль в задачах классификации формаций играют формации с условием Шеметкова (кратко, $\check{S}$-формации), т. е. формации, у которых любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Нам понадобятся следующие два результата о $\check{S}$-формациях.

Теорема 2.2 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная $\check{S}$-формация. Тогда $\mathfrak{F}$ является локальной формацией.*

Теорема 2.3 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\check{S}$-формацией, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$ для $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ и, кроме того, $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p.*

3. Доказательство теоремы

Всюду в дальнейшем термин «подгрупповой функтор» означает «естественный подгрупповой функтор».

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 3.1. *Пусть Θ — подгрупповой функтор. Если $1 \in \Theta(G)$, то все нормальные подгруппы из G входят в $\Theta(G)$.*

Доказательство. Пусть $1 \in \Theta(G)$ и $N \triangleleft G$. Рассмотрим естественный гомоморфизм ϕ группы G с ядром N. Тогда из определения подгруппового функтора следует, что $1^{\phi} = N/N \in \Theta(G/N)$, а значит, $N = (N/N)^{\phi^{-1}} \in \Theta(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть Θ — транзитивный подгрупповой функтор. Если $1 \in \Theta(G)$, то все субнормальные подгруппы из G входят в $\Theta(G)$. В частности, если группа G нильпотентна и $1 \in \Theta(G)$, то $\Theta(G) = S(G)$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется. Пусть H — субнормальная подгруппа группы G, не входящая в $\Theta(G)$. Заключим H в максимальную нормальную подгруппу R группы G. Ввиду леммы 3.1 $R \in \Theta(G)$. Из свойств подгруппового функтора и $1 \in \Theta(G)$ следует, что $1 \in \Theta(R)$. В силу выбора группы G заключаем, что $H \in \Theta(R)$. Так как функтор Θ транзитивен, то $H \in \Theta(G)$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть Θ — транзитивный подгрупповой функтор, и пусть Z_p — циклическая группа порядка p, для которой $1 \in \Theta(Z_p)$. Тогда $\Theta(P) = S(P)$ для любой p-группы P.*

Доказательство. Покажем, что всегда $1 \in \Theta(P)$. Предположим, что это не так. Пусть P — группа наименьшего порядка, для которой $1 \notin \Theta(P)$, и M — максимальная нормальная подгруппа группы P. Так как $|M| < |P|$, то $1 \in \Theta(M)$. Поскольку $|P/M| = p$, из $1 = M/M \in \Theta(P/M)$ следует, что $M \in \Theta(P)$. Из транзитивности функтора Θ имеем $1 \in \Theta(P)$. Ввиду леммы 3.2 заключаем, что $\Theta(P) = S(P)$. Лемма доказана.

Определение. *Характеристикой* подгруппового функтора Θ называется множество всех тех простых чисел p, для которых $1 \in \Theta(Z_p)$.

Если Θ — подгрупповой функтор, то далее через $\mathfrak{X}_\Theta$ будет обозначать класс $\{G \mid \Theta(G) = S(G)\}$, т. е. класс групп G, все подгруппы которых входят в $\Theta(G)$.

Лемма 3.4. *Если Θ — подгрупповой* ETP*-функтор, то класс групп $\mathfrak{X}_\Theta$ является наследственной формацией.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{X}_\Theta$ и N — нормальная подгруппа группы G. Если H/N — подгруппа группы G/N, то из $H \in \Theta(G)$ и определения подгруппового функтора следует, что $H/N \in \Theta(G/N)$. Так как подгруппа H/N выбрана произвольно, то $\Theta(G/N) = S(G/N)$, т. е. $G/N \in \mathfrak{X}_\Theta$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\Theta$ — гомоморф.

Пусть теперь N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G и $G/N_1 \in \mathfrak{X}_\Theta$, $G/N_2 \in \mathfrak{X}_\Theta$. Если P — силовская подгруппа группы G, то из условия леммы следует, что $PN_i/N_i \in \Theta(G/N_i)$, $i = 1, 2$. Тогда из определения подгруппового функтора получаем, что $PN_i \in \Theta(G)$ и $PN_i/N_1 \cap N_2 \in \Theta(G/N_1 \cap N_2)$, $i = 1, 2$. Так как функтор Θ является решеточным, то $PN_1/N_1 \cap N_2 \cap PN_2/N_1 \cap N_2 = P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2 \in \Theta(G/N_1 \cap N_2)$. Так как $N_1 \cap N_2 \in \Theta(G)$, то единичная подгруппа группы $G/N_1 \cap N_2$ входит в $\Theta(G/N_1 \cap N_2)$. Из свойств подгруппового функтора Θ следует, что единичная подгруппа группы $G/N_1 \cap N_2$ входит в $\Theta(P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2)$. Значит, ввиду леммы 3.2

$$\Theta(P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2) = S(P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2).$$

Поскольку функтор Θ является транзитивным, все подгруппы группы $P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2$ входят в $\Theta(G/N_1 \cap N_2)$.

Итак, все примарные подгруппы группы $G/N_1 \cap N_2$ входят в $\Theta(G/N_1 \cap N_2)$. Так как любая подгруппа порождается своими примарными подгруппами, а функтор Θ является решеточным, то $\Theta(G/N_1 \cap N_2) = S(G/N_1 \cap N_2)$. Таким образом, $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}_\Theta$, и класс $\mathfrak{X}_\Theta$ является формацией.

Установим наследственность формации $\mathfrak{X}_\Theta$. Пусть $G \in \mathfrak{X}_\Theta$ и H — подгруппа из G. Если K — произвольная подгруппа из H, то из условия $G \in \mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $K \in \Theta(G)$. Из свойств подгруппового функтора Θ получаем, что $K = K \cap H \in \Theta(H)$. Отсюда $H \in \mathfrak{X}_\Theta$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\Theta$ — наследственная формация. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть π — характеристика подгруппового* ETP-*функтора Θ. Тогда $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi$. Тогда ввиду леммы 3.3 $\Theta(P) = S(P)$ для любой p-подгруппы P, а значит, $P \in \mathfrak{X}_\Theta$. В силу леммы 3.4 класс $\mathfrak{X}_\Theta$ замкнут относительно прямых произведений с конечным числом сомножителей. Значит, $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть Θ — подгрупповой* ETP-*функтор. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{X}_\Theta$, когда $1 \in \Theta(G)$ и $P \in \Theta(G)$ для любой силовской подгруппы P группы G.*

Доказательство. Пусть $P \in \Theta(G)$ для любой силовской подгруппы P группы G. Из $1 \in \Theta(G)$ и свойств функтора Θ следует, что $1 = 1 \cap P \in \Theta(P)$. Но тогда по лемме 3.3 $\Theta(P) = S(P)$ для любой силовской подгруппы группы G. Отсюда и из транзитивности Θ следует, что $S(P) \subseteq \Theta(G)$ для любой силовской подгруппы P из G. Пусть H — произвольная подгруппа из G. Так как H порождается своими силовскими подгруппами, ввиду решеточности Θ и теоремы Силова получаем, что $H \in \Theta(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть Θ — подгрупповой* ETP-*функтор. Предположим, что $G = [P]\langle A, B\rangle$, где P — p-подгруппа, а $\langle A, B\rangle$ — q-группа, p и q — различные простые числа. Если $PA \in \mathfrak{X}_\Theta$ и $PB \in \mathfrak{X}_\Theta$, то $G \in \mathfrak{X}_\Theta$.*

Доказательство. Пусть группа $G = [P]\langle A, B\rangle$ удовлетворяет условию леммы. Тогда P — силовская p-подгруппа, а $\langle A, B\rangle$ — силовская q-подгруппа группы G соответственно. Из $PA \in \mathfrak{X}_\Theta$ и наследственности формации $\mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. Согласно лемме 3.5 $P \in \mathfrak{X}_\Theta$ и $\langle A, B\rangle \in \mathfrak{X}_\Theta$.

Из $G/P \in \mathfrak{X}_\Theta$ вытекает, что $PA/P \in \Theta(G/P)$. Отсюда $PA \in \Theta(G)$. Из $PA \in \mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $P \in \Theta(PA)$ и $A \in \Theta(PA)$. Но тогда ввиду транзитивности Θ получаем, что $A \in \Theta(G)$ и $P \in \Theta(G)$. Аналогично $B \in \Theta(G)$. В силу решеточности Θ имеем $\langle A, B\rangle \in \Theta(G)$. Теперь результат вытекает из леммы 3.6. Лемма доказана.

Лемма 3.8. *Пусть Θ — подгрупповой* ETP-*функтор и R — p-замкнутая $\{p, q\}$-группа Шмидта, причем $\Phi(R) = 1$. Если $R \in \mathfrak{X}_\Theta$, то $\mathfrak{X}_\Theta$ содержит все расширения p-групп с помощью циклических q-групп.*

Доказательство. Известно [3], что существует единственная (с точностью до изоморфизма) p-замкнутая $\{p, q\}$-группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини. Поэтому $R = [N]Z_q$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа в R, а Z_q — подгруппа простого порядка q.

Вначале докажем, что формация $\mathfrak{X}_\Theta$ содержит все расширения p-групп с помощью групп простого порядка q. Рассмотрим группу $G = PZ_q$, где P — p-группа и $P \triangleleft G$. Индукцией по порядку G докажем, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$.

Рассмотрим случай, когда $Z_q \triangleleft G$. Тогда $G = P \times Z_q$. Из $R \in \mathfrak{X}_\Theta$ и наследственности класса $\mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. По лемме 3.5 $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$, где $\pi = \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. Это означает, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что подгруппа Z_q ненормальна в G.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $K \neq P$. Ясно, что $K \subseteq P$ и $KZ_q \neq G$. По индукции $G/K \in \mathfrak{X}_\Theta$. Поэтому $Z_qK/K \in \Theta(G/K)$. Отсюда $KZ_q \in \Theta(G)$. Так как $|KZ_q| < |G|$, то $KZ_q \in \mathfrak{X}_\Theta$. Отсюда $Z_q \in \Theta(G)$. Из $G/P \in \mathfrak{X}_\Theta$ вытекает, что $P/P \in \mathfrak{X}_\Theta$. Значит, $P \in \Theta(G)$. Таким образом, любая силовская подгруппа из G содержится в $\Theta(G)$. Кроме того, из $P \in \Theta(G)$ и $Z_q \in \Theta(G)$ следует, что $1 = P \cap Z_q \in \Theta(G)$. Теперь, применяя лемму 3.6, получаем, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$.

Будем считать далее, что $K = P$. Но тогда G является группой Шмидта и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_\Theta$ по условию. Итак, доказано, что всякое расширение p-группы с помощью групп простого порядка q принадлежит формации $\mathfrak{X}_\Theta$.

Пусть теперь G — расширение p-группы с помощью циклической группы порядка q^n. Тогда группу G можно представить в виде $G = PZ_{q^n}$, где P — p-группа, $P \triangleleft G$ и Z_{q^n} — циклическая q-группа.

Докажем индукцией по n, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Как показано выше, утверждение для $n = 1$ выполняется. Пусть $n > 1$. Рассмотрим группу $E = Pwr(Z_q wr Z_{q^{n-1}})$. По теореме 18.9 из [4] группа G изоморфна некоторой подгруппе из E. Пусть B — база сплетения $Z_q wr Z_{q^{n-1}}$. Тогда $Z_q wr Z_{q^{n-1}} = [B]Z_{q^{n-1}}$. Обозначим через P^* силовскую p-подгруппу группы E. Тогда $E = [P^*]([B]Z_{q^{n-1}})$. Так как $E/P^* \simeq [B]Z_{q^{n-1}} \in \mathfrak{X}_\Theta$, то $P^*Z_{q^{n-1}}/P^* \in \Theta(E/P^*)$. Отсюда следует, что $P^*Z_{q^{n-1}} \in \Theta(E)$. По индукции $P^*Z_{q^{n-1}} \in \mathfrak{X}_\Theta$. Отсюда вытекает, что $Z_{q^{n-1}} \in \Theta(P^*Z_{q^{n-1}})$ и $P^* \in \Theta(P^*Z_{q^{n-1}})$. Но тогда в силу транзитивности Θ получаем, что $Z_{q^{n-1}} \in \Theta(E)$ и $P^* \in \Theta(E)$.

Аналогично $P^*B/P^* \in \Theta(E/P^*)$. Отсюда $P^*B \in \Theta(E)$. Так как $B \simeq Z_q \times \cdots \times Z_q$, то, используя предположение индукции (случай $n = 1$) и лемму 3.7, нетрудно видеть, что $P^*B \in \mathfrak{X}_\Theta$. Но тогда $B \in \Theta(P^*B)$. Из транзитивности Θ следует, что $B \in \Theta(E)$. Так как Θ — решеточный функтор, то $\langle B, Z_{q^{n-1}} \rangle = [B]Z_{q^{n-1}} \in \Theta(E)$. По лемме 3.6 $E \in \mathfrak{X}_\Theta$. Из наследственности $\mathfrak{X}_\Theta$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная формация. Если $G \in M(\mathfrak{X})$, то $G^{\mathfrak{X}}$ является примарной группой.*

Доказательство. Пусть $G \in M(\mathfrak{X})$. Предположим, что группа G нильпотентна. Если G непримарна, то из $\mathfrak{X} = D_0\mathfrak{X}$ и строения G следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с $G \in M(\mathfrak{X})$. Значит, G — примарная группа и утверждение леммы в этом случае выполняется.

Пусть группа G ненильпотентна. Тогда $F(G) \neq G$. Так как согласно утверждению c) теоремы 10.6 из [4] $\Phi(G)$ — собственная подгруппа из $F(G)$, найдутся простое число $p \in \pi(F(G))$ и силовская p-подгруппа P из $F(G)$ такие, что $P \not\subseteq \Phi(G)$. Но тогда $G = PM$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G. Из $G \in M(\mathfrak{X})$ следует, что $M \in \mathfrak{X}$, а значит, $G/P \in \mathfrak{X}$. Тем самым $G^{\mathfrak{X}} \subseteq P$. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1 теоремы. Пусть Θ — подгрупповой ЕТР-функтор. По лемме 3.4 класс $\mathfrak{X}_\Theta$ является наследственной формацией. Установим локальность $\mathfrak{X}_\Theta$.

Пусть $G \in M(\mathfrak{X}_\Theta)$. Если группа G нильпотентна, то нетрудно видеть, что G — p-группа, где p — некоторое простое число. Ввиду леммы 3.5 $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$, где $\pi = \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. Поэтому G — группа простого порядка p, где p не принадлежит $\pi(\mathfrak{X}_\Theta)$.

Пусть группа G ненильпотентна. По лемме 3.9 $G^{\mathfrak{X}_\Theta}$ является p-группой, где p — некоторое простое число и $p \in \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. Обозначим $G^{\mathfrak{X}_\Theta} = N$.

Предположим вначале, что $NS \neq G$ для любой силовской подгруппы S группы G. Тогда из $G/N \in \mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $SN/N \in \Theta(G/N)$. Отсюда получаем, что $SN \in \Theta(G)$. Так как $SN \neq G$ и $G \in M(\mathfrak{X}_\Theta)$, то $SN \in \mathfrak{X}_\Theta$, а значит, $S \in \Theta(SN)$. Отсюда и из транзитивности Θ следует, что $S \in \Theta(G)$. Так как G ненильпотентна, то G непримарна. Отсюда следует, что $1 = \cap S$ (S пробегает все силовские подгруппы из G) является Θ-подгруппой в G. Теперь ввиду леммы 3.6 имеем, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Получили противоречие с условием $G \in M(\mathfrak{X}_\Theta)$.

Пусть $G = NS$ для некоторой силовской подгруппы S группы G. Из ненильпотентности G вытекает, что S — q-группа, где q — некоторое простое число, отличное от p. Следовательно, G является p-замкнутой $\{p, q\}$-группой. Если S — нециклическая группа, то $S = \langle A, B\rangle$, где A и B — различные собственные подгруппы из S. Учитывая, что $NA \neq G$ и $NB \neq G$, имеем $NA \in \mathfrak{X}_\Theta$ и $NB \in \mathfrak{X}_\Theta$. Тогда по лемме 3.7 получаем, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Снова пришли к противоречию с условием $G \in M(\mathfrak{X}_\Theta)$.

Значит, S — циклическая q-группа. Так как G ненильпотентна, то в G найдется подгруппа H, которая является группой Шмидта. Из p-замкнутости группы G вытекает p-замкнутость H. Пусть вначале H — собственная подгруппа в G. Так как $\mathfrak{X}_\Theta = Q\mathfrak{X}_\Theta$, то $H/\Phi(H) \in \mathfrak{X}_\Theta$. Следовательно, по лемме 3.8 $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Противоречие. Поэтому остается только случай, когда G — группа Шмидта.

Итак, доказано, что любая группа из $M(\mathfrak{X}_\Theta)$ либо группа Шмидта, либо имеет простой порядок. Применяя теорему 2.2, получаем локальность формации $\mathfrak{X}_\Theta$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Доказательство утверждения 2 теоремы. Из доказательства утверждения 1 теоремы следует, что класс $\mathfrak{X}_\Theta$ является локальной наследственной $\check{S}$-формацией. Тогда по теореме 2.3 $\mathfrak{X}_\Theta$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$ для $p \in \pi'(\mathfrak{F})$ и, кроме того, $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p.

Если $\pi(\mathfrak{X}_\Theta) = \{p\}$, то $\mathfrak{X}_\Theta = \mathfrak{N}_p$. В этом случае утверждение 2) теоремы выполняется.

Пусть $|\pi(\mathfrak{X}_\Theta)| > 1$ и p и q — некоторые различные простые числа из $\pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. Предположим, что $q \in \pi(f(p))$. Докажем, что $p \in \pi(f(q))$. Допустим противное, т. е. что $p \notin \pi(f(q))$. Рассмотрим точный неприводимый $F_p[Z_q]$-модуль U над полем F_p, состоящим из p элементов. Такой модуль существует по теореме 10.3 из [4]. Рассмотрим группу $E = [U]Z_q$. Нетрудно видеть, что $E \in \mathfrak{X}_\Theta$. Так как $O_q(E) = 1$ и U — единственная минимальная нормальная подгруппа группы E, то по теореме 10.3 из [4] существует точный неприводимый $F_q[E]$-модуль W над полем F_q. Рассмотрим группу $F = [W]E = [W]([U]Z_q)$. Поскольку W — минимальная нормальная подгруппа в F и $W \cap E = 1$, то E — максимальная подгруппа группы F. Так как $C_F(W) = F_q(F) = W$ и $F/W \notin f(q)$, то группа F

формации $\mathfrak{X}_\Theta$ не принадлежит. Ясно, что $F^{\mathfrak{X}_\Theta} = W$.

Из построения F вытекает, что в F имеется точно три класса максимальных подгрупп: $H_1 = E$, $H_2 = [W]Z_q$ и $H_3 = [W]U$.

Из $F/W \in \mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $H_i/W \in \Theta(F/W)$, $i = 2, 3$. Отсюда $H_i \in \Theta(F), i = 2, 3$. Покажем, что $H_1 \in \Theta(F)$. Заметим, что $N_E(Z_q) = Z_q$. Поэтому найдется такой элемент $x \in E$, что $Z_q \neq Z_q^x$. Тогда $E = \langle Z_q, Z_q^x \rangle$. Из $F/W \in \mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $Z_qW/W \in \Theta(F/W)$, откуда $Z_qW \in \Theta(F)$. Так как Z_qW — примарная q-группа, а $\mathfrak{X}_\Theta$ — локальная формация и $q \in \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$, то $Z_qW \in \mathfrak{X}_\Theta$. Это означает, что $Z_q \in \Theta(Z_qW)$. Ввиду транзитивности Θ получаем, что $Z_q \in \Theta(E)$, а значит, $Z_q^x \in \Theta(E)$. Но тогда $E = \langle Z_q, Z_q^x \rangle \in \Theta(F)$. Таким образом, $H_i \in \Theta(F)$ для $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что силовские подгруппы H_2 и $H_1 \cap H_3$ группы F входят в $\Theta(F)$. Поэтому по лемме 3.6 имеем $F \in \mathfrak{X}_\Theta$. Получили противоречие. Таким образом, из $q \in \pi(f(p))$ следует, что $p \in \pi(f(p))$.

Воспользуемся этим свойством, чтобы доказать более сильное утверждение: если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$, что влечет $f(p) = f(q)$. Пусть $r \neq q$ и $r \in \pi(f(p)) \setminus \pi(f(q))$. Рассмотрим точный неприводимый $F_r[Z_p]$-модуль над полем F_r и группу $X = [U]Z_p$. Так как $r \in \pi(f(p))$, то $r \in \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$. Используя доказанное выше утверждение, получаем, что $p \in \pi(f(r))$. Пусть L — точный неприводимый $F_q[X]$-модуль над полем F_q. Рассмотрим группу $G = [L]([U]Z_p)$. Группа G не принадлежит формации $\mathfrak{X}_\Theta$, так как $G/F_q(G) \simeq [U]Z_p \notin f(q)$. Ясно, что $L = G^{\mathfrak{X}_\Theta}$. В G имеется точно три класса максимальных подгрупп: $M_1 = [U]Z_p$, $M_2 = [L]U$ и $M_3 = [L]Z_p$. Рассуждая, как и выше, можно доказать, что $M_i \in \Theta(G)$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Получили противоречие. Таким образом, если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$. Из строения экрана f следует, что $f(p) = f(q)$. Более того, если найдется простое число $r \in \pi(f(p)) \cap \pi(f(q))$, то также $f(p) = f(q)$.

Итак, для любых p и q либо $f(p) = f(q)$, либо $f(p) \cap f(q) = (1)$. Поэтому существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{X}_\Theta)$ в объединение попарно не пересекающихся подмножеств, т. е. $\pi(\mathfrak{X}_\Theta) = \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i$, где $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для любых $l \neq k$ из I, причем $p, q \in \pi_i$ тогда и только тогда, когда $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$.

Обозначим $\mathfrak{X}^* = D_0(\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$. Докажем, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}_\Theta$. Из полученных выше свойств экрана f следует, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$, т. е. f — максимальный внутренний экран формации $\mathfrak{X}_\Theta$. Так как $\mathfrak{X}_\Theta = D_0\mathfrak{X}_\Theta$, то $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$. Предположим, что множество $\mathfrak{X}_\Theta \setminus \mathfrak{X}^*$ непусто, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X}_\Theta \setminus \mathfrak{X}^*$. По лемме 2.3 $\mathfrak{X}^*$ — локальная формация, значит, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N = G^{\mathfrak{X}^*}$, причем N — p-группа, $N = F_p(G)$ и $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{X}^*$. Так как $G \in \mathfrak{X}_\Theta$, то $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in f(p)$, т. е. $\pi(M) \subseteq \pi(f(p))$. Но тогда $G \in f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Из построения формации $\mathfrak{X}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{X}^*$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{X}_\Theta = \mathfrak{X}^*$. Утверждение 2 теоремы доказано.

Прежде чем доказать утверждение 3 теоремы, сформулируем несколько утверждений, устанавливающих связь между множествами подгрупп $\Theta(G)$ и $\mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G)$.

Лемма 3.10. *Пусть Θ — подгрупповой* ЕТР*-функтор. Если M — $\mathfrak{X}_\Theta$-нормальная максимальная подгруппа группы G, то $M \in \Theta(G)$.*

Доказательство. Так как $M \supseteq G^{\mathfrak{X}_\Theta}$, из определения класса $\mathfrak{X}_\Theta$ следует, что $M/G^{\mathfrak{X}_\Theta} \in \Theta(G/G^{\mathfrak{X}_\Theta})$. Но тогда $M \in \Theta(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Пусть Θ — подгрупповой* ЕТР*-функтор. Если подгруппа H $\mathfrak{X}_\Theta$-субнормальна в G, то $H \in \Theta(G)$.*

Доказательство. Поскольку H $\mathfrak{X}_\Theta$-субнормальна в G, существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$$

такая, что $H_{i-1} \supseteq H_i^{\mathfrak{X}_\Theta}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Ввиду леммы 3.10 имеем, что $H_{i-1} \in \Theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Используя теперь транзитивность функтора Θ, заключаем, что $H \in \Theta(G)$. Лемма доказана.

Определение. Пусть Θ — подгрупповой функтор. Собственная подгруппа H группы G называется Θ-*максимальной*, если $H \in \Theta(G)$ и всегда из $H \subseteq K \subseteq G$ и $K \in \Theta(G)$ следует, что либо $K = H$, либо $K = G$.

Лемма 3.12. *Пусть Θ — подгрупповой функтор. Если H — Θ-максимальная подгруппа группы G, то H максимальна в G.*

Доказательство. Предположим, что H не максимальна в G. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Пусть $C = \mathrm{Core}_G(M)$ и K/C — главный фактор группы G. Заметим, что $G = MK$ и $M \cap K = C$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $C \subseteq H$. Допустим, что $HK = G$. Тогда из $H \subseteq M$ и $M \cap K = C$ следует, что $H = M$, т. е. H — максимальная подгруппа группы G. Пришли к противоречию. Значит, $HK \neq G$. Тогда из определения подгруппового функтора получаем, что $HK/K \in \Theta(G/K)$, а следовательно, $HK \in \Theta(G)$. Так как K не содержится в H, то $H \subset HK$. Кроме того, $HK \subset G$. Пришли к противоречию с тем, что H — Θ-максимальная подгруппа группы G.

2. Пусть C не входит в H. Тогда $H \subset HC \subseteq M \subset G$ и $HC \in \Theta(G)$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.13. *Пусть Θ — подгрупповой* ЕТР*-функтор. Если H — собственная подгруппа группы G и $H \in \Theta(G)$, то существует такая максимальная цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$, что $H_i \in \Theta(G)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Заключим H в Θ-максимальную подгруппу M группы G. Ввиду леммы 3.12 M — максимальная подгруппа группы G. В силу свойств функтора Θ из $H \in \Theta(G)$ следует, что $H \in \Theta(M)$. Из $|M| < |G|$ заключаем, что существует максимальная цепь $H = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_t = M$, в которой $M_i \in \Theta(M)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Так как функтор Θ транзитивен, из $M \in \Theta(G)$ следует, что $M_i \in \Theta(G)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Значит, цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_t = M \subset G$$

искомая. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 3 теоремы. Необходимо доказать, что $\Theta(G) = \mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G)$ для любой группы G. Включение $\mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G) \subseteq \Theta(G)$ следует из леммы 3.11.

Установим справедливость обратного включения. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой включение $\Theta(G) \subseteq \mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G)$ не выполняется. Если $G \in \mathfrak{X}_\Theta$, то очевидно, что $\mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G) = \Theta(G)$. Следовательно, $G \notin \mathfrak{X}_\Theta$. Ввиду свойств функторов Θ и $\mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}$, а также леммы 3.13 можно считать, что в G имеется максимальная подгруппа M такая, что $M \in \Theta(G)$, но M не является $\mathfrak{X}_\Theta$-нормальной. Вначале предположим, что $\mathrm{Core}_G(M) \neq 1$. Тогда $M/\mathrm{Core}_G(M) \in$

$\Theta(G/\operatorname{Core}_G(M))$, а значит, ввиду выбора G имеем

$$M/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G/\operatorname{Core}_G(M)).$$

Отсюда получаем, что $M \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G)$. Пришли к противоречию с выбором G.

Следовательно, $\operatorname{Core}_G(M) = 1$. В этом случае по теореме 15.2 из [4] $G = [N]M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N = C_G(N) = F(G)$, $|N| = p^\alpha$, p — простое число.

Предположим, что M не является группой простого порядка. Пусть Q — произвольная подгруппа простого порядка из M. Рассмотрим подгруппу NQ. Из $M \in \Theta(G)$ и свойств функтора Θ следует, что $NQ \cap M = Q(N \cap M) = Q \in \Theta(NQ)$. Отсюда и из $|NQ| < |G|$ выводим, что $Q \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(NQ)$. Заметим, что $(NQ)^{\mathfrak{X}_\Theta} \subseteq N \in \mathfrak{N}$. Ввиду теоремы 15.10 из [3] имеем, что $NQ \in \mathfrak{X}_\Theta$. В силу утверждения 2 теоремы $\mathfrak{X}_\Theta = D_0(\bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$, где $\bigcup\limits_{i\in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{X}_\Theta)$ и $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $l \neq k$ из I. Будем считать, что $p \in \pi_{i_0}$ для некоторого номера $i_0 \in I$. Пусть $\pi(Q) = q$ и $q \in \pi_{i_1}$, где $i_1 \neq i_0$. Тогда из $NQ \in \mathfrak{X}_\Theta$ и строения формации $\mathfrak{X}_\Theta$ вытекает, что $NQ = N \times Q$. Это означает, что $Q \subseteq C_{NQ}(N) \subseteq C_G(N) = N$. Получили противоречие. Следовательно, $q \in \pi_{i_0}$. Таким образом, доказано, что $\pi(G) \subseteq \pi_{i_0}$, а значит, $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Снова получили противоречие.

Остается принять, что $G = [N]M$, где M — группа простого порядка $q \neq p$. Так как функтор Θ является решеточным и $M \in \Theta(G)$, то $1 = \operatorname{Core}_G(M) \in \Theta(G)$. Ввиду леммы 3.3 $S(N) \subseteq \Theta(G)$. Учитывая теперь, что $M \in \Theta(G)$, $G \in \Theta(G)$ и Θ согласован с автоморфизмами группы G, получаем $\Theta(G) = S(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{X}_\Theta$; противоречие. Теорема доказана.

4. Заключительные замечания. Открытые вопросы

В работе [7] в универсуме конечных разрешимых групп описаны наследственные локальные формации, обладающие решеточным свойством. Предлагаемый нами функторный подход позволяет отбросить условие локальности, существенно используемое при доказательстве основного результата работы [7].

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством;*

2) *$\mathfrak{X}_{\mathrm{sn}_\mathfrak{F}} = D_0(\bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$, где $\bigcup\limits_{i\in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I.*

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством. Тогда согласно леммам 2.1 и 2.2 функтор $\Theta = \mathrm{sn}_\mathfrak{F}$ является подгрупповым ЕТР-функтором. Теперь утверждение 2 следует из доказанной выше теоремы.

Так как $\mathrm{sn}_\mathfrak{F} = \mathrm{sn}_\mathfrak{H}$ для $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}_{\mathrm{sn}_\mathfrak{F}}$, то импликация 2) $\to$ 1) следует из теоремы 2.1. Следствие доказано.

Заметим, что при доказательстве лемм 3.1–3.8, 3.10, 3.11 мы не использовали условие разрешимости групп. Применяя эти утверждения, в универсуме всех конечных групп можно получить

Следствие 2. *Пусть Θ — подгрупповой* ЕТР*-функтор. Тогда*

1) *класс $\mathfrak{X}_\Theta$ — наследственная композиционная формация;*

2) *$\mathrm{sn}_{\mathfrak{X}_\Theta}(G) \subseteq \Theta(G)$ для любой группы G.*

Доказательство. Согласно лемме 3.4 $\mathfrak{X}_\Theta$ — формация. Установим композиционность $\mathfrak{X}_\Theta$. Для этого ввиду теоремы 4.17 из [4] достаточно показать, что $\mathfrak{X}_\Theta$ — разрешимо-насыщенная формация, т. е. из $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{X}_\Theta$ всегда вытекает, что $G \in \mathfrak{X}_\Theta$, где $G_{\mathfrak{S}}$ — разрешимый радикал группы G.

Пусть $\Phi = \Phi(G_{\mathfrak{S}})$ и $G/\Phi \in \mathfrak{X}_\Theta$. Рассмотрим подгруппу $PG_{\mathfrak{S}}$, где P — произвольная силовская подгруппа группы G. Сужение функтора Θ на класс $\mathfrak{S}$ также ETP-функтор. Поэтому согласно утверждению 1 теоремы формация $\mathfrak{X}_\Theta \cap \mathfrak{S}$ локальна, а значит, насыщенна. Поэтому из $PG_{\mathfrak{S}}/\Phi \in \mathfrak{X}_\Theta \cap \mathfrak{S}$ и $\Phi \subseteq \Phi(PG_{\mathfrak{S}})$ следует, что $PG_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{X}_\Theta \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_\Theta$. Отсюда и из наследственности $\mathfrak{X}_\Theta$ получаем, что $P\Phi \in \mathfrak{X}_\Theta$, тем самым $P \in \Theta(P\Phi)$. Из $P\Phi/\Phi \in \Theta(G/\Phi)$ следует, что $P\Phi \in \Theta(G)$. Из транзитивности Θ имеем $P \in \Theta(G)$. Но тогда по лемме 3.6 $G \in \mathfrak{X}_\Theta$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\Theta$ — композиционная формация.

Утверждение 2 вытекает из леммы 3.11. Следствие доказано.

Ввиду следствия 2 возникают два вопроса.

Вопрос 1. *Описать наследственные композиционные формации $\mathfrak{F}$, для которых функтор $\mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}$ является ETP-функтором.*

Вопрос 2. *Пусть Θ — подгрупповой ETP-функтор. Существует ли такая композиционная наследственная формация $\mathfrak{F}$, что $\Theta(G) = \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ для всякой группы G?*

Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то функтор $\Theta = \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}$ является естественным транзитивным функтором (кратко, ET-функтором). Поэтому возникает следующий вопрос.

Вопрос 3. *Пусть Θ — подгрупповой ET-функтор, заданный на классе всех групп (всех разрешимых групп). Существует ли такая наследственная формация $\mathfrak{F}$, что $\Theta(G) = \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ для всякой группы G?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt H.* Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209–244.
2. *Kegel O. H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd 30. S. 225–228.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
5. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск, 1992.
6. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
7. *Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. 1992. V. 148. P. 42–52.
8. *Плоткин Б. И.* Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы // Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 205–244.
9. *Скиба А. Н.* Об одном классе локальных формаций конечных групп // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 11. С. 382–385.
10. *Семенчук В. Н., Васильев А. Ф.* Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Минск: Наука и техника, 1984. С. 175–181.

Статья поступила 19 октября 1999 г.

г. Гомель
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины
vasiljev@gsu.unibel.by; kamornikov@gsu.unibel.by