Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 512.542

ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПОДГРУППОВЫЕ ФУНКТОРЫ

С. Йи, С. Ф. Каморников

Аннотация. Изучаются разрешимые, включающие, регулярные транзитивные подгрупповые функторы. Доказывается, что любой из таких функторов $\mathfrak{X}$-субнормален для некоторого класса $\mathfrak{X}$ примитивных групп. Устанавливается строение тотально собственного класса решеточного включающего, регулярного транзитивного функтора. Изучаются свойства специальных подгрупповых решеток.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.507

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, решетка подгрупп, примитивный класс, формация, подгрупповой функтор, включающий подгрупповой функтор.

1. Введение

В [1] предложен функциональный метод исследования подгрупповых свойств, позволивший описать в классе конечных разрешимых групп все регулярные наследственные транзитивные подгрупповые функторы, которые являются решеточными (ЕТР-функторы). Тем самым классифицированы все те подрешетки решетки всех подгрупп конечной разрешимой группы, которые обладают свойством транзитивности и корректно ведут себя при эпиморфизмах и в пересечениях с подгруппами.

В данной работе этот метод развивается и используется для характеризации включающих подгрупповых функторов. Отметим, что каждый наследственный подгрупповой функтор является включающим, а обратное неверно. Таким образом, класс исследуемых в данной работе подгрупповых функторов существенно шире класса, рассмотренного в [1].

Термин «включающая функция» (inclusive function) впервые появился в работе Барнса и Кегеля [2] для характеризации формационных проекторов. Включающие функции (под названием «функции Силова») параллельно рассматривались в [3]. Идея включающего подгруппового функтора, аккумулирующая в себе условие сохранения некоторого группового свойства в подгруппах, использовалась Манном [4] при изучении отношений абстрактной нормальности в конечных разрешимых группах.

Обратим внимание на то, что рассматриваемая в работе задача попадает в орбиту следующего вопроса, сформулированного А. Н. Скибой в [5] под номером 1.2.12: можно ли классифицировать все регулярные транзитивные подгрупповые функторы? В общей постановке этот вопрос является весьма сложным даже в классе разрешимых групп. В данной работе предлагается ответ на него в случае включающих подгрупповых функторов.

Research of the first author is supported by the NNSF grant of China (№ 11471055).

Суть функционального метода изучения систем подгрупп, обладающих заданными абстрактными свойствами, заключается в поэтапной реализации следующей схемы:

1) задача описания систем подгрупп, обладающих заданными свойствами, формулируется как задача характеризации соответствующего подгруппового функтора ω;

2) подгрупповому функтору ω ставится в соответствие вполне определенный «собственный» класс $\mathfrak{X}_\omega$;

3) изучаются свойства и строение класса $\mathfrak{X}_\omega$;

4) с помощью класса $\mathfrak{X}_\omega$ подгруппы изучаемых систем характеризуются как объекты теории классов.

В разд. 3, опираясь на понятие примитивно собственного класса подгруппового функтора, мы характеризуем системы подгрупп, которые инвариантны при эпиморфизмах, сохраняются в подгруппах и обладают свойством транзитивности. В разд. 4 с помощью понятия тотально собственного класса подгруппового функтора исследуем решеточные свойства таких систем подгрупп.

Отметим, что интерес к регулярным транзитивным подгрупповым функторам во многом обусловлен тесной связью их свойств со свойствами самих групп. Некоторые аспекты такой связи обсуждались в работах второго автора [6, 7].

2. Определения и используемые результаты

В данной работе слово «группа» всегда означает «конечная разрешимая группа». Поэтому все рассматриваемые ниже подгрупповые функторы разрешимы, т. е. заданы на классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп. Используемые определения и обозначения теории конечных групп и их классов стандартны, их можно найти в [8–10]. Что касается теории подгрупповых функторов, то мы отсылаем читателей к [11].

Пусть A, B — группы, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ — эпиморфизм. Пусть Ω и Σ — некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. Обозначим через Ω^φ множество $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$ образов в B всех подгрупп из Ω, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ — множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Если R — подгруппа из A, то через $R \cap \Omega$ обозначим множество $\{R \cap H \mid H \in \Omega\}$.

Пусть ω — отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\omega(G)$ ее подгрупп. Следуя [11], будем говорить, что ω — *подгрупповой функтор*, если выполняется следующее условие абстрактности:

$$(\omega(G))^\varphi = \omega(G^\varphi)$$

для любого изоморфизма φ каждой группы G.

Подгрупповой функтор ω называется:

1) *регулярным*, если $(\omega(A))^\varphi \subseteq \omega(B)$ и $(\omega(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \omega(A)$ для любого эпиморфизма $\varphi\colon A \longrightarrow B$;

2) *наследственным*, если $H \cap \omega(G) \subseteq \omega(H)$ для любой подгруппы H группы G;

3) *транзитивным*, если для любой группы G всегда из $S \in \omega(H)$ и $H \in \omega(G)$ следует $S \in \omega(G)$;

4) *включающим*, если всегда из $H \in \omega(G)$ и $H \subseteq U \subseteq G$ вытекает $H \in \omega(U)$;

5) *решеточным*, если всегда из $H, K \in \omega(G)$ следует, что $H \cap K \in \omega(G)$ и $\langle H, K\rangle \in \omega(G)$.

Приведенные определения, по сути, аксиоматизируют известные свойства субнормальных подгрупп (инвариантность при гомоморфизмах, наследственность в пересечениях и надгруппах, транзитивность и решеточность).

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из включения $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*проектором*, если HN/N — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G/N для любой нормальной подгруппы N группы G. Из результатов Гашюца [12] следует, что в каждой группе существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-проекторов.

Пусть ω — функция, сопоставляющая каждой группе G все ее подгруппы, содержащие хотя бы один $\mathfrak{F}$-проектор (в частности, если p — простое число, то ω выделяет в каждой группе G все ее подгруппы, содержащие хотя бы одну силовскую p-подгруппу из G). Из свойств $\mathfrak{F}$-проекторов следует, что ω — регулярный включающий транзитивный подгрупповой функтор. За редким исключением функтор ω не наследственный. Таким образом, существует континуум регулярных включающих транзитивных подгрупповых функторов, которые не наследственны. В то же время, как следует из определения, каждый наследственный подгрупповой функтор будет включающим.

Для краткости в дальнейшем подгрупповой функтор будем называть ВРТ-*функтором*, если он одновременно включающий, регулярный и транзитивный.

Если $\mathfrak{X}$ — непустой класс, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G,$$

что $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $\mathrm{sub}_{\mathfrak{X}}$ — отображение, ставящее в соответствие каждой группе множество всех ее $\mathfrak{X}$-субнормальных подгрупп. Если $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация, то, как следует из [11], $\mathrm{sub}_{\mathfrak{X}}$ — подгрупповой функтор, который регулярен, транзитивен и наследствен (а значит, включающий).

Некоторые определения и обозначения, используемые в работе, будем комментировать перед их непосредственным использованием.

3. Характеризация ВРТ-функторов

В данном разделе приводится характеризация ВРТ-функторов в терминах $\mathfrak{X}$-субнормальных подгрупповых функторов, где $\mathfrak{X}$ — некоторый примитивный класс групп.

Лемма 3.1. *Пусть ω — регулярный подгрупповой функтор. Если H — собственная подгруппа группы G, принадлежащая $\omega(G)$, то существует максимальная подгруппа M группы G, содержащая H и принадлежащая $\omega(G)$.*

Доказательство. Пусть K — наибольшая нормальная подгруппа группы G, для которой $HK \neq G$. Пусть L/K — главный фактор группы G. Тогда из определения подгруппы K следует, что $HL = G$. В группе G/K подгруппа L/K минимальная нормальная и, кроме того, справедливо равенство $G/K = (HK/K)(L/K)$. Так как L/K — абелева группа, то HK/K — максимальная подгруппа группы G/K, а HK — максимальная подгруппа группы G.

Поскольку подгрупповой функтор ω регулярен, $M/K = HK/K \in \omega(G/K)$, а следовательно, $M \in \omega(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть ω — BPT-функтор. Если H — собственная подгруппа группы G и $H \in \omega(G)$, то существует такая максимальная цепь*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i \in \omega(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Ввиду леммы 3.1 существует максимальная подгруппа M группы G, содержащая H и принадлежащая $\omega(G)$. Так как функтор ω включающий, из $H \in \omega(G)$ следует $H \in \omega(M)$. В силу выбора группы G из $|M| < |G|$ заключаем, что существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} = M,$$

в которой $H_i \in \omega(M)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Поскольку функтор ω транзитивен, из $M \in \omega(G)$ следует, что $H_i \in \omega(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Значит, цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} = M \subset G$$

искомая. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы вытекает из леммы 3.2 и того, что подгрупповой функтор ω включающий.

Лемма 3.3. *Пусть ω — BPT-функтор. Если H — собственная подгруппа группы G и $H \in \omega(G)$, то существует такая максимальная цепь*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \in \omega(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

В дальнейшем через $\mathfrak{P}$ будем обозначать класс всех разрешимых примитивных групп. Напомним, что группа G называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Как показано в [13], группа G примитивна тогда и только тогда, когда она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая дополняема в G. Это дополнение является максимальной подгруппой группы G с единичным ядром и называется ее *примитиватором*. Понятно, что если M — максимальная подгруппа группы G, то группа $G/\operatorname{Core}_G(M)$ примитивна и $M/\operatorname{Core}_G(M)$ — примитиватор группы $G/\operatorname{Core}_G(M)$.

В дальнейшем любой (в том числе и пустой) подкласс класса $\mathfrak{P}$ будем называть *примитивным классом*.

Для ненулевого подгруппового функтора ω определим класс $\mathfrak{P}(\omega)$ следующим образом:

$$\mathfrak{P}(\omega) = \{A \in \mathfrak{P} \mid \text{ примитиватор группы } A \text{ принадлежит } \omega(A)\}.$$

Если ω — нулевой подгрупповой функтор (т. е. $\omega(G) = \{G\}$ для любой группы G), то полагаем $\mathfrak{P}(\omega) = \varnothing$. Класс $\mathfrak{P}(\omega)$ будем называть *примитивно собственным классом* подгруппового функтора ω.

Следующий результат показывает, что любой BPT-функтор $\mathfrak{X}$-субнормален для своего примитивно собственного класса $\mathfrak{X}$.

Теорема 3.1. *Пусть* ω — ВРТ-*функтор. Тогда для любой группы* G *справедливо равенство*

$$\omega(G) = \mathrm{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G).$$

Доказательство. Пусть $H \in \omega(G)$. Если $H = G$, то, очевидно, $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$. Если H — собственная подгруппа группы G, то на основании леммы 3.3 существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \in \omega(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Так как ω — регулярный подгрупповой функтор, из $H_{i-1} \in \omega(H_i)$ вытекает, что $H_{i-1}/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \omega(H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}))$. Значит, $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{P}(\omega)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$, стало быть, $\omega(G) \subseteq \mathrm{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$.

Пусть $S \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$. Тогда существует максимальная цепь

$$S = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_m = G$$

такая, что $S_i/\operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1}) \in \mathfrak{P}(\omega)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда и из регулярности подгруппового функтора ω имеем, что $S_{i-1} \in \omega(S_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Так как подгрупповой функтор ω транзитивен, $S \in \omega(G)$. Следовательно, $\mathrm{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G) \subseteq \omega(G)$. Теорема доказана.

Замечание. В общем случае подгрупповой функтор $\mathrm{sub}_{\mathfrak{X}}$, являясь регулярным и транзитивным для любого примитивного класса $\mathfrak{X}$, может не быть включающим. Пусть, например, $\mathfrak{X} = (A, B)$, где A — группа, изоморфная симметрической группе третьей степени, B — циклическая группа порядка 2. Очевидно, $\mathfrak{X}$ — примитивный класс. При этом $1 \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{X}}(A)$, но $1 \notin \mathrm{sub}_{\mathfrak{X}}(A_3)$, где A_3 — силовская 3-подгруппа группы A.

4. Решеточные ВРТ-функторы

Для подгруппового функтора ω определим класс

$$\mathfrak{S}_{\omega}^{s} = \{G \in \mathfrak{S} \mid \text{все подгруппы группы } G \text{ принадлежат } \omega(G)\}.$$

Этот класс будем называть *тотально собственным классом* подгруппового функтора ω.

Напомним, что класс $\mathfrak{X}$ называется *наследственным*, если из $G \in \mathfrak{X}$ всегда вытекает, что каждая подгруппа H группы G принадлежит $\mathfrak{X}$. Под *гомоморфом* понимается любой класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов.

Лемма 4.1. *Тотально собственный класс* ВРТ-*функтора является наследственным гомоморфом.*

Доказательство. Пусть ω — ВРТ-функтор и $\mathfrak{S}_{\omega}^{s}$ — его тотально собственный класс. Пусть $G \in \mathfrak{S}_{\omega}^{s}$ и N — нормальная подгруппа группы G. Если H/N — подгруппа группы G/N, то из $H \in \omega(G)$ и определения регулярного функтора следует, что $H/N \in \omega(G/N)$. Таким образом, каждая подгруппа группы G/N принадлежит $\omega(G/N)$, т. е. $G/N \in \mathfrak{S}_{\omega}^{s}$. Следовательно, $\mathfrak{S}_{\omega}^{s}$ — гомоморф.

Установим наследственность гомоморфа $\mathfrak{S}_{\omega}^{s}$. Пусть H — некоторая подгруппа группы $G \in \mathfrak{S}_{\omega}^{s}$. Если D — произвольная подгруппа из H, то ввиду $G \in \mathfrak{S}_{\omega}^{s}$ имеем, что $D \in \omega(G)$. Так как подгрупповой функтор ω включающий, $D \in \omega(H)$. Таким образом, каждая подгруппа группы H принадлежит $\omega(H)$, т. е. $H \in \mathfrak{S}_{\omega}^{s}$. Значит, $\mathfrak{S}_{\omega}^{s}$ — наследственный гомоморф. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Если* BPT-*функтор решеточный, то его тотально собственный класс является наследственной формацией.*

Доказательство. Пусть ω — решеточный BPT-функтор и $\mathfrak{S}_\omega^s$ — его тотально собственный класс. Ввиду леммы 4.1 $\mathfrak{S}_\omega^s$ — наследственный гомоморф. Покажем, что класс $\mathfrak{S}_\omega^s$ замкнут относительно взятия конечных подпрямых произведений.

Пусть N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G и $G/N_1 \in \mathfrak{S}_\omega^s$, $G/N_2 \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Если P — силовская подгруппа группы G, то из определения класса $\mathfrak{S}_\omega^s$ следует, что $PN_1/N_1 \in \omega(G/N_1)$ и $PN_2/N_2 \in \omega(G/N_2)$. Тогда из регулярности подгруппового функтора ω получаем, что $PN_i \in \omega(G)$ и $PN_i/N_1 \cap N_2 \in \omega(G/N_1 \cap N_2)$, $i = 1, 2$. Так как подгрупповой функтор ω решеточный, имеем

$$(PN_1/N_1 \cap N_2) \cap (PN_2/N_1 \cap N_2) = P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2 \in \omega(G/N_1 \cap N_2).$$

Поскольку $N_1 \cap N_2 \in \omega(G)$, единичная подгруппа группы $G/N_1 \cap N_2$ входит в $\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Из свойств подгруппового функтора ω следует, что единичная подгруппа группы $G/N_1 \cap N_2$ входит в $\omega(P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2)$. Значит, ввиду леммы 1.1.6 из [11] все подгруппы группы $P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2$ принадлежат $\omega(P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2)$. Так как подгрупповой функтор ω транзитивен, все подгруппы группы $P(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2$ принадлежат $\omega(G/N_1 \cap N_2)$.

Итак, все примарные подгруппы группы $G/N_1 \cap N_2$ входят в $\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Поскольку любая подгруппа порождается своими примарными подгруппами, а функтор ω решеточный, все подгруппы группы $G/N_1 \cap N_2$ принадлежат $\omega(G/N_1 \cap N_2)$. Таким образом, $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{S}_\omega^s$, и класс $\mathfrak{S}_\omega^s$ является формацией. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 4.3. *Пусть ω — решеточный* BPT-*функтор. Пусть Z_p — циклическая группа порядка p, для которой $1 \in \omega(Z_p)$. Тогда $P \in \mathfrak{S}_\omega^s$ для любой p-группы P.*

Следуя [11], *характеристикой* подгруппового функтора ω будем называть множество всех тех простых чисел p, для которых $1 \in \omega(Z_p)$. Из лемм 4.2 и 4.3 следует, что если π — характеристика решеточного BPT-функтора ω, то $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\omega^s$.

Лемма 4.4. *Пусть ω — решеточный* BPT-*функтор. Группа G принадлежит тотально собственному классу $\mathfrak{S}_\omega^s$ тогда и только тогда, когда $1 \in \omega(G)$ и $P \in \omega(G)$ для каждой силовской подгруппы P группы G.*

Доказательство. Пусть G — группа такая, что $1 \in \omega(G)$ и $P \in \omega(G)$ для каждой силовской подгруппы P группы G. Так как функтор ω включающий, $1 \in \omega(P)$. Отсюда ввиду леммы 4.3 следует, что все подгруппы группы P принадлежат $\omega(P)$. В силу транзитивности функтора ω все подгруппы группы P принадлежат $\omega(G)$. Пусть D — произвольная подгруппа группы G. Поскольку она порождается своими силовскими подгруппами, а функтор ω решеточный, $D \in \omega(G)$. Стало быть, $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Обратное утверждение леммы следует из определения класса $\mathfrak{S}_\omega^s$. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть ω — решеточный* BPT-*функтор и группа G представима в виде $G = P\langle A, B\rangle$, где P — нормальная p-подгруппа группы G, $\langle A, B\rangle$ — q-группа, p и q — различные простые числа. Если $PA \in \mathfrak{S}_\omega^s$ и $PB \in \mathfrak{S}_\omega^s$, то $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$.*

Доказательство. Очевидно, что P — силовская p-подгруппа группы G, $\langle A, B\rangle$ — силовская q-подгруппа группы G. Из условия $PA \in \mathfrak{S}_\omega^s$ и наследственности формации $\mathfrak{S}_\omega^s$ вытекает, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{S}_\omega^s)$. Поэтому на основании леммы 4.3 $P \in \mathfrak{S}_\omega^s$ и $\langle A, B\rangle \in \mathfrak{S}_\omega^s$.

Из $G/P \simeq \langle A, B\rangle$ следует, что $G/P \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Отсюда ввиду регулярности функтора ω имеем $PA \in \omega(G)$. Из $PA \in \mathfrak{S}_\omega^s$ вытекает, что $P \in \omega(PA)$ и $A \in \omega(PA)$. Но тогда ввиду транзитивности функтора ω получаем, что $A \in \omega(G)$ и $P \in \omega(G)$. Аналогично показывается, что $B \in \omega(G)$. Так как функтор ω решеточен, $\langle A, B\rangle \in \omega(G)$. Заключение леммы следует непосредственно из леммы 4.4. Лемма доказана.

Далее понадобится некоторая информация о критических группах тотально собственного класса решеточного ВРТ-функтора. Напомним, что *критической группой* непустого класса $\mathfrak{X}$ (или $\mathfrak{X}$-*критической группой*) называется группа, не принадлежащая классу $\mathfrak{X}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{X}$. Критическая группа класса всех нильпотентных групп — это *группа Шмидта*. Формация $\mathfrak{X}$ называется *формацией с условием Шеметкова*, если каждая $\mathfrak{X}$-критическая группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Лемма 4.6. *Пусть ω — решеточный* ВРТ-*функтор и R — p-замкнутая $\{p, q\}$-группа Шмидта, причем $\Phi(R) = 1$. Если $R \in \mathfrak{S}_\omega^s$, то класс $\mathfrak{S}_\omega^s$ содержит все расширения p-групп с помощью циклических q-групп.*

Доказательство. Так как $\Phi(R) = 1$, из строения группы Шмидта (см., например, [10]) следует, что $R = NQ$, где N — силовская p-подгруппа группы R, являющаяся в ней единственной минимальной нормальной подгруппой, Q — подгруппа простого порядка q, являющаяся силовской q-подгруппой группы R.

Рассмотрим группу $G = PZ_q$, где P — нормальная p-подгруппа группы G, Z_q — группа простого порядка q. Покажем, что $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Применим индукцию по порядку группы G.

Предположим, что подгруппа Z_q нормальна в группе G. Тогда $G = P \times Z_q$. Так как $R \in \mathfrak{S}_\omega^s$, из наследственности класса $\mathfrak{S}_\omega^s$ вытекает, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{S}_\omega^s)$. По лемме 4.3 $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\omega^s$, где $\pi = \pi(\mathfrak{S}_\omega^s)$. Значит, $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Поэтому далее будем полагать, что подгруппа Z_q не нормальна в G.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппы группы G. Предположим, что $K \neq P$. Очевидно, $K \subseteq P$ и $KZ_q \neq G$. Ввиду предположения индукции $G/K \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Поэтому $Z_qK/K \in \omega(G/K)$. Отсюда $Z_qK \in \omega(G)$. Так как $|Z_qK| < |G|$, то $Z_qK \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Тем самым из транзитивности функтора ω имеем $Z_q \in \omega(G)$. Из $G/P \in \mathfrak{S}_\omega^s$ следует, что $P/P \in \omega(G/P)$ и $P \in \omega(G)$. Таким образом, каждая силовская подгруппа группы G содержится в $\omega(G)$. Кроме того, из $P \in \omega(G)$ и $Z_q \in \omega(G)$ вытекает, что $1 = P \cap Z_q \in \omega(G)$. Применяя лемму 4.4, получаем, что $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$.

Итак, далее полагаем, что $K = P$. Но тогда группа G является группой Шмидта и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, по условию леммы $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$.

Таким образом, доказано, что всякое расширение p-группы с помощью группы простого порядка q принадлежит формации $\mathfrak{S}_\omega^s$.

Пусть группа G является расширением p-группы с помощью циклической группы порядка q^n. Тогда группу G можно представить в виде $G = PZ_{q^n}$, где P — нормальная p-группа и Z_{q^n} — циклическая q-подгруппа порядка q^n.

Применяя индукцию по n, докажем, что $G \in \mathfrak{S}_\omega^s$. Отметим, что при $n = 1$ утверждение верно (это показано выше). Пусть $n > 1$. Рассмотрим группу

$E = P \wr (Z_q \wr Z_{q^{n-1}})$. Ввиду утверждения A.18.9 из [8] группа G изоморфна некоторой подгруппе группы E. Пусть B — база сплетения $Z_q \wr Z_{q^{n-1}}$. Тогда $Z_q \wr Z_{q^{n-1}} = [B]Z_{q^{n-1}}$. Обозначим через P^* силовскую p-подгруппу группы E. Тогда $E = P^*([B]Z_{q^{n-1}})$. Так как $E/P^* \simeq [B]Z_{q^{n-1}} \in \mathfrak{S}^s_\omega$, то $P^*Z_{q^{n-1}}/P^* \in \omega(E/P^*)$. Отсюда $P^*Z_{q^{n-1}} \in \omega(E)$. По индукции $P^*Z_{q^{n-1}} \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Значит, $Z_{q^{n-1}} \in \omega(P^*Z_{q^{n-1}})$ и $P^* \in \omega(P^*Z_{q^{n-1}})$. Но тогда из транзитивности функтора ω следует, что $Z_{q^{n-1}} \in \omega(E)$ и $P^* \in \omega(E)$.

Аналогично показывается, что $P^*B/P^* \in \omega(E/P^*)$. Отсюда $P^*B \in \omega(E)$. Так как $B \simeq Z_q \times \dots \times Z_q$, используя предположение индукции ($n = 1$) и лемму 4.5, получаем $P^*B \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Тогда $B \in \omega(P^*B)$. Отсюда и из транзитивности функтора $\omega(G)$ следует, что $B \in \omega(E)$. Поскольку подгрупповой функтор ω решеточен, $\langle B, Z_{q^{n-1}} \rangle = [B]Z_{q^{n-1}} \in \omega(E)$. Но тогда ввиду леммы 4.4 $E \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Из наследственности класса $\mathfrak{S}^s_\omega$ получаем, что $G \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает важные свойства тотально собственного класса решеточного BPT-функтора.

Лемма 4.7. *Если ω — решеточный* BPT-*функтор, то $\mathfrak{S}^s_\omega$ — насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова.*

Доказательство. Тот факт, что класс $\mathfrak{S}^s_\omega$ является наследственной формацией, вытекает из леммы 4.2. Покажем, что формация $\mathfrak{S}^s_\omega$ насыщенная.

Пусть G — критическая группа класса $\mathfrak{S}^s_\omega$. Если она нильпотентна, то G — p-группа для некоторого простого числа p. Ввиду леммы 4.2 справедливо включение $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}^s_\omega$, где $\pi = \pi(\mathfrak{S}^s_\omega)$. Поэтому G — группа простого порядка p, где p не принадлежит $\pi(\mathfrak{S}^s_\omega)$.

Пусть группа G не нильпотентна. Тогда ввиду леммы 3.2.7 из [11] $\mathfrak{S}^s_\omega$-корадикал N группы G является p-группой, где p — некоторое простое число и $p \in \pi(\mathfrak{S}^s_\omega)$.

Предположим, что $NS \neq G$ для любой силовской подгруппы S группы G. Тогда из $G/N \in \mathfrak{S}^s_\omega$ следует, что $SN/N \in \omega(G/N)$. Отсюда получаем, что $SN \in \omega(G)$. Так как $NS \neq G$ и G — критическая группа класса $\mathfrak{S}^s_\omega$, то $SN \in \mathfrak{S}^s_\omega$, а значит, $S \in \omega(SN)$. Из транзитивности функтора ω следует, что $S \in \omega(G)$. Так как группа G не нильпотентна, она не примарна. Поскольку подгрупповой функтор ω решеточен, пересечение всех силовских подгрупп группы G, равное 1, принадлежит $\omega(G)$. Ввиду леммы 4.4 имеем $G \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Получаем противоречие с тем, что группа G является критической группой формации $\mathfrak{S}^s_\omega$.

Значит, $G = SN$ для некоторой силовской подгруппы S группы G. Так как группа G не нильпотентна, S — q-группа, где q — некоторое простое число, отличное от p. Следовательно, G является p-замкнутой $\{p,q\}$-группой. Если S — нециклическая группа, то $S = \langle A, B \rangle$, где A и B — различные максимальные подгруппы группы S. Учитывая, что $NA \neq G$ и $NB \neq G$, имеем $NA \in \mathfrak{S}^s_\omega$ и $NB \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Тогда по лемме 4.5 получаем, что $G \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Снова пришли к противоречию с тем, что группа G является критической группой формации $\mathfrak{S}^s_\omega$.

Итак, S — циклическая q-группа. Так как группа G не нильпотентна, в группе G найдется подгруппа H, которая является группой Шмидта. Из p-замкнутости группы G следует p-замкнутость подгруппы H. Предположим, что H — собственная подгруппа группы G. Ввиду леммы 4.1 класс $\mathfrak{S}^s_\omega$ является гомоморфом, значит, $H/\Phi(H) \in \mathfrak{S}^s_\omega$. Следовательно, по лемме 4.6 $G \in \mathfrak{S}^s_\omega$; противоречие. Стало быть, остается принять, что группа G является группой Шмидта.

Таким образом, каждая критическая группа класса $\mathfrak{S}^s_\omega$ либо является группой Шмидта, либо имеет простой порядок, т. е. формация $\mathfrak{S}^s_\omega$ является формацией с условием Шеметкова. Так как по лемме 4.1 формация $\mathfrak{S}^s_\omega$ наследственна, ввиду основного результата в [14] (см. также [15]) она насыщенна. Лемма доказана.

Если $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство классов групп, то через $\underset{i\in I}{\times}\mathfrak{X}_i$ обозначается класс всех групп, которые представимы в виде $H_{i_1} \times \cdots \times H_{i_t}$, где $i_k \in I$, $H_{i_k} \in \mathfrak{X}_{i_k}$ для всех $k = 1, 2, \dots, t$. Через $\mathfrak{S}_\pi$ далее обозначается формация всех разрешимых π-групп, где π — некоторое множество простых чисел.

Теорема 4.1. *Если ω — решеточный* BPT-*функтор, то существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi\big(\mathfrak{S}^s_\omega\big)$ на попарно не пересекающиеся подмножества, что*

$$\mathfrak{S}^s_\omega = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}.$$

Доказательство. По лемме 4.7 $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}^s_\omega$ является наследственной насыщенной формацией с условием Шеметкова. Тогда ввиду [16] (см. также [15]) формация $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$ для всех p, не принадлежащих $\pi(\mathfrak{F})$, и, кроме того, $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p.

Если $\pi(\mathfrak{F}) = \{p\}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. В этом случае, очевидно, теорема верна.

Пусть $|\pi(\mathfrak{F})| > 1$ и p и q — различные простые числа из $\pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что $q \in \pi(f(p))$. Покажем, что в этом случае $p \in \pi(f(q))$. Допустим, что p не принадлежит $\pi(f(q))$. Рассмотрим точный и неприводимый $F_p[Z_q]$-модуль U над полем F_p, состоящим из p элементов (Z_q — группа порядка q). Такой модуль существует по теореме B.10.3 из [8]. Рассмотрим группу $E = [U]Z_q$. Очевидно, что $E \in \mathfrak{F}$. Так как $O_q(E) = 1$ и U — единственная минимальная нормальная подгруппа группы E, по теореме B.10.3 из [8] существует точный неприводимый $F_q[E]$-модуль W над полем F_q. Рассмотрим группу $F = [W]E = [W]([U]Z_q)$. Поскольку W — минимальная нормальная подгруппа в F и $W \cap E = 1$, то E — максимальная подгруппа группы F. Так как $C_F(W) = F_q(F) = W$ и F/W не принадлежит $f(q)$, группа F не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что $F^{\mathfrak{F}} = W$.

Из строения группы F следует, что в F имеются в точности три класса максимальных подгрупп: первый класс содержит подгруппу $H_1 = E$, второй класс — подгруппу $H_2 = [W]Z_q$ и третий класс — подгруппу $H_3 = [W]U$.

Заметим, что из $F/W \in \mathfrak{F}$ следует, что $H_i/W \in \omega(F/W)$, $i = 2, 3$. Отсюда ввиду регулярности функтора ω имеем $H_i \in \omega(F)$, $i = 2, 3$. Покажем, что $H_1 \in \omega(F)$. Так как $N_E(Z_q) = Z_q$, найдется такой элемент $x \in E$, что $Z_q \neq Z_q^x$. Тогда $E = \big\langle Z_q, Z_q^x \big\rangle$. Из $F/W \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $Z_qW/W \in \omega(F/W)$. Отсюда $Z_qW \in \omega(F)$. Так как Z_qW — примарная q-группа, а $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $q \in \pi(\mathfrak{F})$, то $Z_qW \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $Z_q \in \omega(Z_qW)$. Ввиду транзитивности подгруппового функтора ω получаем, что $Z_q \in \omega(F)$, а значит, $Z_q^x \in \omega(F)$. Поскольку подгрупповой функтор ω решеточен, $E = \big\langle Z_q, Z_q^x \big\rangle \in \omega(F)$. Таким образом, доказано, что $H_i \in \omega(F)$ для $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что силовские подгруппы H_2 и $H_1 \cap H_3$ группы F входят в $\omega(F)$. Поэтому ввиду леммы 4.4 имеем $F \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, из $q \in \pi(f(p))$ следует, что $p \in \pi(f(q))$.

Воспользуемся этим свойством, чтобы доказать более сильное утверждение: если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$, что влечет $f(p) = f(q)$. Пусть $r \neq q$ и

$r \in \pi(f(p)) \setminus \pi(f(q))$. Рассмотрим точный неприводимый $F_r[Z_p]$-модуль U над полем F_r. Рассмотрим группу $X = [U]Z_p$. Так как $r \in \pi(f(p))$, то $r \in \pi(\mathfrak{F})$. Используя доказанное выше утверждение, получаем, что $p \in \pi(f(r))$. Пусть L — точный неприводимый $F_q[X]$-модуль над полем F_q. Рассмотрим группу $G = [L]([U]Z_p)$. Группа G не принадлежит формации $\mathfrak{F}$, ибо группа $G/F_q(G) \simeq [U]Z_p$ не принадлежит формации $f(q)$. Очевидно, L — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Кроме того, в группе G имеются в точности три класса максимальных подгрупп с представителями $M_1 = [U]Z_p$, $M_2 = [L]U$ и $M_3 = [L]Z_p$. Рассуждая описанным выше способом, получаем $M_i \in \omega(G)$ для $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$. Из строения экрана f вытекает, что $f(p) = f(q)$. Более того, если найдется простое число $r \in \pi(f(p)) \cap \pi(f(q))$, то также $f(p) = f(q)$.

Итак, для любых p и q либо $f(p) = f(q)$, либо $f(p) \cap f(q) = 1$. Поэтому существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ в объединение попарно не пересекающихся подмножеств, т. е. $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i$, где $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для любых $l \neq k$ из I, причем $p, q \in \pi_i$ тогда и только тогда, когда $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$.

Обозначим $\mathfrak{X}^* = \mathop{\times}\limits_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Покажем, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}$. Из полученных свойств экрана f следует, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \subseteq \mathfrak{F}$, т. е. f — максимальный внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что множество $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}^*$ непусто. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}^*$. Поскольку $\mathfrak{X}^*$ — насыщенная формация, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N = G^{\mathfrak{X}^*}$, причем N — p-группа, $N = F_p(G)$ и $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{X}^*$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in f(p)$, т. е. $\pi(M) \subseteq \pi(f(p))$. Но тогда $G \in f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Из строения формации $\mathfrak{X}^*$ следует, что $G \in \mathfrak{X}^*$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}^*$. Теорема доказана.

Лемма 4.8. *Пусть ω — регулярный транзитивный подгрупповой функтор и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^s_\omega$. Если подгруппа H группы G $\mathfrak{X}$-субнормальна в G, то $H \in \omega(G)$.*

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{X}$-субнормальна в G, существует такая максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Из определения тотально собственного класса следует, что $H_{i-1} / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \omega(H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}))$. Поскольку подгрупповой функтор ω регулярен, $H_{i-1} \in \omega(H_i)$. Используя транзитивность подгруппового функтора ω, заключаем, что $H \in \omega(G)$. Лемма доказана.

Объединим теперь теоремы 3.1 и 4.1 в один результат.

Теорема 4.2. *Пусть ω — решеточный* BPT*-функтор, $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}(\omega)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}^s_\omega$. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $\omega(G) = \operatorname{sub}_{\mathfrak{H}}(G)$;

(2) $\operatorname{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$ *— подрешетка решетки всех подгрупп группы G*;

(3) $\operatorname{sub}_{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \omega(G)$.

Доказательство. Утверждение (1) сразу следует из теоремы 3.1.

Ввиду теоремы 4.1 существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно не пересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = \mathop{\times}\limits_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Тогда ввиду [17] $\operatorname{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$ — подрешетка решетки всех подгрупп группы G.

Включение (3) вытекает непосредственно из леммы 4.8. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф.* О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 30–40.

2. *Barnes D. W., Kegel O. H.* Gaschütz functors on finite soluble groups // Math. Z. 1966. Bd 94, Heft 2. S. 134–142.

3. *Sudbrock W.* Sylowfunktionen in endlichen Gruppen // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1966. V. 36, N 1. P. 158–184.

4. *Mann A.* On subgroups of finite soluble groups. III // Isr. J. Math. 1973. V. 16, N 4. P. 446–451.

5. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Белорус. наука, 1977.

6. *Каморников С. Ф.* О решетке регулярных транзитивных подгрупповых функторов // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1034–1040.

7. *Каморников С. Ф.* Об одном классе решеточных подгрупповых функторов // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 3. С. 355–364.

8. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 1992.

9. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

10. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

11. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорус. наука, 2003.

12. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Bd 80, Heft 4. S. 300–305.

13. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.

14. *Скиба А. Н.* Об одном классе локальных формаций конечных групп // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 11. С. 982–985.

15. *Каморников С. Ф.* О двух проблемах Л. А. Шеметкова // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 801–812.

16. *Семенчук В. Н., Васильев А. Ф.* Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Минск: Наука и техника, 1984. С. 175–181.

17. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.

Статья поступила 13 ноября 2014 г.

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Departament of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China
yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
Международный университет МИТСО,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru