Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 517.948+513.88 *МАТЕМАТИКА*

Ф. И. ЛАНДЕР

РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ СДВИГА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТРЯГИНА $\Pi_\varkappa^{(n)}$

(Представлено академиком И. Н. Векуа 7 XII 1970)

1. Конечная (бесконечная) последовательность вещественных чисел $\{s_k\}_{k=0}^{2n-2}$ $\left(\{s_k\}_{k=0}^{\infty}\right)$ принадлежит, по определению, классу $\mathfrak{P}_{\varkappa;\,n}(\mathfrak{P}_\varkappa)$, если форма $\sum\limits_{i,j=0}^{n-1} s_{i+j}\xi_i\xi_j$ $\Big($если формы $\sum\limits_{i,j=0}^{m-1} s_{i+j}\xi_i\xi_j$ при достаточно больших $m \geqslant m_0)$ имеет (имеют) точно $\varkappa$ положительных квадратов. Легко показать, что изучение бесконечных продолжений ранга n в классе $\mathfrak{P}_\varkappa$ невырожденных последовательностей класса $\mathfrak{P}_{\varkappa;\,n}$ сводится к изучению расширений эрмитова оператора сдвига с индексом дефекта (1,1), действующего в пространстве $\Pi_\varkappa^{(n)}$ ([1]), $\dim \Pi_\varkappa^{(n)} = n$, до самосопряженного оператора, действующего в том же пространстве $\Pi_\varkappa^{(n)}$ ([1-5]).

2. Пусть $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ — базис пространства $\Pi_\varkappa^{(n)}$ и A — оператор сдвига, т. е. $Ae_k = e_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

Пусть D_A и R_A — соответственно область определения и область значений оператора A $(D_A = \text{л.о.}\{e_k\}_{k=0}^{n-2})$, $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)D_A$. Легко проверяется, что вектор $y = \sum \eta_i e_i \in R_A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\sum \eta_i \lambda^i = 0$.

Очевидно, что всякое расширение $\tilde{A}$ оператора A определяется равенством $\tilde{A}e_{n-1} = \lambda_0 e_0 + \ldots + \lambda_{n-1}e_{n-1}$ и является циклическим оператором, характеристический (минимальный) многочлен которого имеет вид $\varphi(\lambda) = \lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_1\lambda - \alpha_0$.

Предложение: *вектор $z = \delta_0 e_0 + \ldots + \delta_{n-1}e_{n-1}$ тогда и только тогда является собственным вектором оператора $\tilde{A}$, принадлежащим собственному числу λ_0, когда $\delta_{n-1}\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \delta_1\lambda + \delta_0)$* ($\delta_{n-1} \neq 0$, *так как оператор A не имеет собственных векторов*).

Пусть $\Gamma = \|a_{ij}\|_{i,j=0}^{n-1}$ — произвольная матрица. Введем обозначения (при $k = 0, 1, \ldots, n-1$): $\Delta_k = |a_{ij}|_{i,j=0}^{k}$, $\Delta_{-1} = 1$; A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе Δ_{n-1}; $d_k(u_0, \ldots, u_{n-1})$ — определитель, полученный из Δ_{n-1} заменой k-го столбца столбцом $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$; $d_k(\lambda) = d_k(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}) = \sum_j A_{jk}\lambda^k$;

$$\Psi(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \mu & \ldots & \mu^{n-1} \\ 1 & a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0,n-1} \\ \lambda & a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{n-1} & a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \sum A_{ij}\lambda^i\mu^j. \qquad (1)$$

Определитель (1) впервые, по-видимому, рассматривался Кронекером ([7]) (см. также ([8-10])); в этих работах матрица Γ была теплицевой или ганкелевой.

Функция $\Psi(\lambda, \mu)$ обладает свойствами: а) *если* $\Gamma = \Gamma^*$, *то* $\Psi(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \overline{\Psi(\lambda, \mu)}$, *в частности*, $\operatorname{Im}\Psi(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$; б) *если* $\Gamma = \Gamma'$, *то* $\Psi(\lambda, \mu) = \Psi(\mu, \lambda)$; в) *если* Γ — *теплицева эрмитова матрица, то* (*при* $\lambda, \mu \neq 0$) $\Psi(\bar{\lambda}^{-1}, \bar{\mu}^{-1}) = \overline{(\lambda\mu)}^{1-n}\overline{\Psi(\lambda, \mu)}$ (*доказательство основано на равенстве* $A_{n-i-1,\, n-j-1} = \bar{A}_{ij}$); г) *легко строятся примеры неособенных эрмитовых матриц, для которых* $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) \equiv 0$ *на вещественной оси или на единичной окружности. Однако для неособенной комплексной ганкелевой (теплицевой, не обязательно эрмитовой) матрицы будет* $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = \Psi(\lambda, \lambda) \not\equiv 0$ *на вещественной оси* ($\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = \Psi(\lambda^{-1}, \lambda) \not\equiv 0$ *на единичной окружности*).

Простое доказательство этого факта базируется на очевидной лемме.

Лемма. *Если для матрицы* $\|a_{ij}\|_{i,j=0}^{n-1}$ *обозначить*: $\mathfrak{M}_k = \{(i, j) : a_{ij} = a_k\}$, $k = 1, \ldots, N$, $i, j = 0, \ldots, n-1$, *и* $A_k = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{M}_k} A_{ij}$, *то* $\sum_{k=1}^{N} a_k A_k = n\Delta_{n-1}$; д) *если обозначить* $\Gamma(\lambda, \mu) = \|a_{ji}\lambda\mu - \mu a_{j+1,\, i} - \lambda a_{j,\, i+1} + a_{j+1,\, i+1}\|_0^{n-2}$, *то* $\det \Gamma(\lambda, \mu) = -\Psi(\lambda, \mu)$, *в частности*, $\det \Gamma(\bar{\lambda}, \lambda) = -\Psi(\bar{\lambda}, \lambda)$.

3. Пусть теперь Γ — матрица Грама базиса сдвига оператора A, т. е. $\Gamma = \|a_{ij}\|_0^{n-1}$, где $a_{ij} = (e_j, e_i)$; $\Delta_{n-1} \neq 0$, $\Gamma = \Gamma^*$. Легко проверяется, что при всяком $\lambda \in \mathbf{c}^1$ существует единственный (с точностью до скалярного множителя) ненулевой вектор, ортогональный к $R_A(\lambda)$. Если обозначить его через h_λ, полагая при этом $(h_\lambda, e_0) = 1$, то $h_\lambda = \sum \pi_k(\lambda) e_k$, где $\pi_k(\lambda) = \Delta_{n-1}^{-1} d_k(\bar{\lambda}) = \Delta_{n-1}^{-1} \sum A_{jk}\bar{\lambda}^j$.

Если E — пространство Понтрягина $\Pi_{\varkappa'}^{(m)}$, то типом пространства E будем называть число $\varkappa'$. В дальнейшем будет необходимо по заданному λ определять тип подпространства $R_A(\lambda)$. В связи с этим выводится $(h_\lambda, h_\mu) = \Delta_{n-1}^{-1}\Psi(\bar{\lambda}, \mu)$, в частности, $(h_\lambda, h_\lambda) = -\Delta_{n-1}^{-1}\Psi(\bar{\lambda}, \lambda)$.

Тип подпространства $R_A(\lambda)$ позволяет определить

Теорема 1. *Подпространство* $R_A(\lambda)$ *вырождено* (*имеет тип* $\varkappa$, *имеет тип* $\varkappa - 1$) *тогда и только тогда, когда* $(h_\lambda, h_\lambda) = 0$ (*соответственно* $(h_\lambda, h_\lambda) < 0$, $(h_\lambda, h_\lambda) > 0$), *или, что эквивалентно, когда* $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = 0$ (*соответственно* $\Delta_{n-1}\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) > 0$, $\Delta_{n-1}\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) < 0$).

Учитывая, что матрица $\Gamma(\bar{\lambda}, \lambda)$ является матрицей Грама базиса $\{e_{k+1} - \lambda e_k\}_0^{n-2}$ подпространства $R_A(\lambda)$, получаем, что для определения числа положительных квадратов формы, порожденной матрицей $\Gamma(\bar{\lambda}, \lambda)$, достаточно знать число $\varkappa$ и $\operatorname{sgn}[\Delta_{n-1}\Psi(\bar{\lambda}, \lambda)]$. Это замечание позволяет, в частности, свести требование теоремы 4 из ([5]) о строгой позитивности последовательности $\{L_\varepsilon[c_p]\}_{p=0}^{n-2}$ к неравенству $\Delta_{n-1} \det \|L_\varepsilon[c_{p-q}]\|_{p,q=0}^{n-2} = -\Delta_{n-1}\Psi(\bar{\varepsilon}, \varepsilon) > 0$ ($|\varepsilon| = 1$).

4. В связи с теоремой 1 и ее применением представляет интерес алгебраическая кривая L_0, определяемая уравнением $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = 0$. Ясно, что если Γ — дефинитная матрица, то L_0 — пустое множество. Обратное, как показывает пример диагональной матрицы $\|1, 1, -1, 1\|$ (или $\|1, -1, 1, 1\|$), неверно (заметим, что для матрицы $\|1, 1, 1, -1\|$ L_0 непусто). Из представления $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = -\sum A_{ij}\bar{\lambda}^i\lambda^j$ выводится

Теорема 2. а) *Если* $\Delta_{n-2} \neq 0$, *то кривая* L_0 (*если она существует*) *является ограниченной*; б) *если* $\Delta_{n-2} = 0$ *и* $\Delta_{n-3} \neq 0$, *то кривая имеет асимптоту, задаваемую уравнением* $\arg \lambda = \varphi_0 \pm \pi/2$, *и целиком лежит в области, задаваемой неравенством* $|\lambda| < K|\sec(\psi - \varphi_0)|$, *где* $\varphi_0 = \arg A_{n-1,\, n-2}$, K — *некоторая постоянная*, $\arg \lambda = \psi$.

Для случая $\varkappa = 1$ из теоремы 2 следует теорема 4 из ([11]).

5. Легко проверяется, что оператор A сдвига является эрмитовым тогда и только тогда, когда матрица Грама его базиса сдвига является ганкелевой (при этом она является вещественной), и обратно. Далее всюду A — эрмитов оператор сдвига, $\Gamma = \|s_{i+j}\|_{i,j=0}^{n-1}$

Теорема 3. *Для того чтобы расширение S эрмитова оператора A сдвига было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы* $Se_{n-1} = \beta_0 e_0 + \ldots + \beta_{n-1}e_{n-1}$, *где числа* $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ *удовлетворяют системе* $\sum_j s_{k+j}\beta_j = s_{k+n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $s_{2n-1} = \zeta$, $\mathrm{Im}\ \zeta = 0$.

Эта система имеет при любом ζ единственное решение $\beta_k = \Delta_{n-1}^{-1} d_k(s_n, \ldots, s_{2n-2}, \zeta)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Операторы C $(\supset A)$, полученные по этим формулам, будем обозначать через S_ζ; таким образом, при $\mathrm{Im}\ \zeta = 0$ имеем $S_\zeta^c = S_\zeta$ (S_ζ^c — оператор, сопряженный с S_ζ в индефинитной метрике пространства E).

Пусть $x, y \in E$, ζ, $\nu \in \mathbf{C}^1$ $\xi_{n-1}(\eta_{n-1})$ — соответствующая координата вектора $x(y)$. Тогда $(S_\zeta x, y) - (x, S_\nu y) = \xi_{n-1}\bar{\eta}_{n-1}(\zeta - \bar{\nu})$. В частности, при $\zeta = \nu$ будет $(S_\zeta x, y) - (x, S_\zeta y) = \xi_{n-1}\bar{\eta}_{n-1}(\zeta - \bar{\zeta})$, $(S_\zeta x, x) - (x, S_\zeta x) = |\xi_{n-1}|^2(\zeta - \bar{\zeta})$.

Характеристический многочлен оператора S можно записать в виде известного определителя ([10–13])

$$\varphi_\zeta(\lambda) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{n-1} & s_n \\ s_1 & s_2 \ldots s_n & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n \ldots s_{2n-2} & \zeta \\ 1 & \lambda \ \ldots \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{n-1}}[-\zeta B(\lambda) + C(\lambda)]. \qquad (2)$$

Здесь $B(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)$, $C(\lambda) = \Delta_{n-1}\varphi_0(\lambda)$.

Таким образом, все дальнейшие предложения о собственных числах операторов S_ζ являются также предложениями о нулях полиномов, ортогональных на вещественной оси ([10], [12], [13]), и их обобщений (обычное ограничение $\Delta_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$ нами не налагается).

Пусть $\zeta, \nu, \lambda, \mu \in \mathbf{C}^1$, $S_\zeta z_\lambda = \lambda z_\lambda$, $S_\nu z_\mu = \mu z_\mu$. Тогда имеют место формулы: а) $(\lambda - \bar{\mu})(z_\lambda, z_\mu) = \xi_{n-1}\bar{\eta}_{n-1}(\zeta - \bar{\nu})$; б) если $\zeta = \nu$, то $(\lambda - \bar{\mu})(z_\lambda, z_\mu) = \xi_{n-1}\bar{\eta}_{n-1}(\zeta - \bar{\zeta})$; в) если $\lambda = \mu$, то $\mathrm{Im}\,\lambda(z_\lambda, z_\lambda) = \mathrm{Im}\,\zeta|\xi_{n-1}|^2$. Заметим, что $\xi_{n-1}(\eta_{n-1}) \neq 0$, так как оператор A не имеет собственных векторов. Из формул а) — в) вытекает

Теорема 4. а) *Если* $\lambda \in \sigma(S_\zeta)$ *и* $\bar{\lambda} \in \sigma(S_\nu)$, *то* $\zeta = \bar{\nu}$; б) *если* $\lambda \in \sigma(S_\zeta)$ и $\bar{\lambda} \in \sigma(S_\zeta)$, *то* $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$ (ср. ([14]), *теорема* 2); в) *если* $\lambda \in \sigma(S_\zeta)$, $\mu \in \sigma(S_\nu)$ и $(z_\lambda, z_\mu) = 0$, *то* $\zeta = \bar{\nu}$; г) *если* $\lambda \in \sigma(S_\zeta)$, $\mu \in \sigma(S_\zeta)$ *и* $(z_\lambda, z_\mu) = 0$, *то* $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$. (*Здесь* $\sigma(T)$ — *спектр оператора* T.)

Заметим, что а) и б) следуют также из формулы (2).

6. Пусть $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$, т. е. $S_\zeta^c = S_\zeta$, и $S_\zeta z_\lambda = \lambda z_\lambda$. Тогда (при соответствующей нормировке) $z_\lambda = h_{\bar{\lambda}}$ и $\xi_{n-1} = \Delta_{n-1}^{-1} d_{n-1}(\lambda) = \Delta_{n-1}^{-1} B(\lambda)$. Так как $\xi_{n-1} \neq 0$, то корни многочлена $B(\lambda)$ не могут быть собственными числами операторов $S_\zeta = S_\zeta^c$. Из этого следует, что многочлены $C(\lambda)$ и $B(\lambda)$, а также $\varphi_\zeta(\lambda)$ (при любом ζ) и $B(\lambda)$ взаимно просты.

Введем теперь дробно-рациональную функцию $\zeta(\lambda) = C(\lambda)B^{-1}(\lambda)$.

Теорема 5. *Для существования оператора* S_ζ, *имеющего* λ_0 *своим собственным числом, необходимо и достаточно, чтобы* $B(\lambda_0) \neq 0$. *При этом* $\lambda_0 \in \sigma(S_\zeta)$ *тогда и только тогда, когда* $\zeta = \zeta(\lambda_0)$.

Из формулы а) пункта 5 при $B(\lambda) \neq 0$, $B(\mu) \neq 0$ следует $-\Delta_{n-1}(\lambda - \mu)\Psi(\lambda, \mu) = B(\lambda)B(\mu)[\zeta(\lambda) - \zeta(\mu)]$; $-(\lambda - \mu)\Psi(\lambda, \mu) = \varphi_\zeta(\lambda)B(\mu) - \varphi_\zeta(\mu)B(\lambda)$. Последнее тождество было впервые, по-видимому, установлено Кронекером ([7]) (см. также ([8], [9])). Полагая $\mu = \bar{\lambda}$, получаем $-\Delta_{n-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = |B(\lambda)|^2\,\mathrm{Im}\,\zeta(\lambda)$; $-\mathrm{Im}\,\lambda\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = \varphi_\zeta(\lambda) \times B(\bar{\lambda}) - \varphi_\zeta(\bar{\lambda})B(\lambda)$, откуда следует

Теорема 6. *Для того чтобы существовало самосопряженное расширение эрмитова оператора A сдвига, имеющее* λ_0 *своим собственным числом, необходимо и достаточно, чтобы* а) $B(\lambda_0) \neq 0$; б) *выполнялось хотя бы одно из условий* $\mathrm{Im}\,\lambda_0 = 0$, $\Psi(\bar{\lambda}_0, \lambda_0) = 0$.

Имеют место также формулы $\zeta'(\lambda) = -\Delta_{n-1}B^{-2}(\lambda)\Psi(\lambda, \lambda)$, откуда вновь следует, что $\Psi(\lambda, \lambda) \neq 0$ (для вещественной ганкелевой матрицы Г); $\varphi_{\zeta(\mu)}(\lambda) = -B^{-1}(\mu)(\lambda - \mu)\Psi(\lambda, \mu)$.

7. Самосопряженный оператор S в пространстве $\Pi_\varkappa$ назовем эллиптическим, если он имеет $\varkappa$-мерное положительное инвариантное подпространство; гиперболическим, если его спектр $\sigma(S)$ содержит невещественные собственные числа; параболическим, если он не эллиптичен и не гиперболичен. Припишем вещественному числу (точке) ζ тип, одноименный с типом оператора $S_\zeta (=S_\zeta{}^c)$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 7. *Оператор A допускает гиперболическое расширение $S_\zeta (=S_\zeta{}^c)$ с критическими* ([6]) *собственными числами* λ_0, $\bar{\lambda}_0$ $(\mathrm{Im}\,\lambda_0 \neq 0)$ *тогда и только тогда, когда* а) $B(\lambda_0) \neq 0$, б) $\Psi(\bar{\lambda}_0, \lambda_0) = 0$, т. е. $\lambda_0 \in L_0$.

Теорема 8. *Любой эрмитов оператор A сдвига в пространстве* $\Pi_\varkappa{}^{(n)}$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant n-1)$ *допускает гиперболические расширения* $S_\zeta (=S_\zeta{}^c)$.

Теорема 9. *Множество гиперболических ζ (эллиптических ζ) открыто (открыто или пусто) на вещественной оси. Граничные точки этих множеств и только они являются параболическими ζ.*

Следствие. *Если эрмитов оператор A сдвига допускает эллиптические расширения, то он допускает расширения всех трех типов.*

Теорема 10. *Для того чтобы оператор A допускал параболическое расширение S_ζ с критическим собственным числом λ_0* $(\mathrm{Im}\,\lambda_0 = 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы* а) $B(\lambda_0) \neq 0$; б) $\Psi(\lambda_0, \lambda_0)\Delta_{\varkappa-1} \leqslant 0$; в) *многочлен* $(\lambda, -\lambda_0)\Psi(\lambda, \lambda_0)$ *имел только вещественные корни и среди них кратные. При этом* $\zeta = \zeta(\lambda_0)$. *Если* $\Psi(\lambda - \lambda_0) = 0$, *то требование кратности излишне.*

Следствие. *Так как многочлен $\Psi(\lambda, \lambda)$ имеет степень $2n-2$, то число параболических расширений не превосходит $2n-2$.*

Теорема 11. *Для того чтобы оператор A допускал эллиптическое расширение S_ζ с критическим собственным числом λ_0* $(\mathrm{Im}\,\lambda_0 = 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы* а) $B(\lambda_0) \neq 0$; б) $\Delta_{n-1}\Psi(\lambda_0, \lambda_0) < 0$; в) *многочлен $\Psi(\lambda, \lambda_0)$ имел только вещественные простые корни. При этом* $\zeta = \zeta(\lambda_0)$.

При $\varkappa = 1$ условие в) в теоремах 10, 11 выполняется автоматически, а число параболических расширений равно числу вещественных корней многочлена $\Psi(\lambda, \lambda)$.

8. Аналогичные теоремы имеют место для унитарных расширений изометрических операторов сдвига в пространстве $\Pi_\varkappa{}^{(n)}$. Для случая $\varkappa = 1$, $\dim \Pi_1 \leqslant \infty$ соответствующие теоремы были получены в ([5], [6], [11]).

В заключение выражаю свою глубокую благодарность И. С. Иохвидову за постоянное внимание к настоящей работе.

Воронежский государственный педагогический институт
им. М. Н. Покровского

Поступило
2 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Тр. Московск. матем. общ., 5, 169 (1956). [2] В. И. Горбачук, Кандидатская диссертация, Киев, 1963. [3] В. И. Плющева (Горбачук), Укр. матем. журн., **14**, № 1, 30 (1962). [4] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1966. [5] И. С. Иохвидов, ДАН, **173**, № 4, 758 (1967). [6] И. С. Иохвидов, Докторская диссертация, Одесса, 1966. [7] L. Kronecker, Sitzungsber. Königl. Preuss. Ak. d. W., 1891. [8] G. Frobenius, Sitzungsber. Königl. Preuss. Ak. d. W., 16—31, 1913. [9] Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., 1961. [10] Г. Сеге, Ортогональные полиномы, М., 1963. [11] И. С. Иохвидов, ДАН, **173**, № 5, 1002 (1967). [12] Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938. [13] Я. Л. Геронимус, см. ([10]). [14] М. Г. Крейн, Теория функций, функц. анализ и их прилож., в. 2, 131 (1966).