Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

И. М. ЛЕЙБО

О ЗАМКНУТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ БЕСКОНЕЧНО-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 I 1971)

Все рассматриваемые пространства предполагаются нормальными.

Теорема 1. *Пусть X есть S-слабо бесконечно-мерное слабо паракомпактное полное в смысле Чеха пространство, Y — A-сильно бесконечно-мерное слабо паракомпактное наследственно нормальное пространство, f: $X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение пространства X на пространство Y.*

Тогда множество $Y^* = \{y \in Y \mid |f_y^{-1}| > \aleph_0\}$ является A-сильно бесконечно-мерным.

Лемма 1. *Пусть X — наследственно нормальное A-сильно бесконечно-мерное пространство, X_1 — его A-слабо бесконечно-мерное подмножество и $\overline{X} = X \setminus X_1$.*

Тогда существует замкнутое в X и A-сильно бесконечно-мерное подмножество $F \subseteq \overline{X}$.

Доказательство. Рассмотрим систему $\omega = \{A_i, B_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых в пространстве X множеств A_i и B_i, $A_i \cap B_i = \phi$, не разделимых перегородками с пустым пересечением. Существуют такие бесконечные подсистемы ω_1 и ω_2 системы ω, что $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ и $\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$. Пусть $\omega_1 = \{A_j', B_j'\}_{j=1}^{\infty}$. Рассмотрим систему $\{X_1 \cap [OA_j'], X_1 \cap [OB_j']\}$, где OA_j' и OB_j' — такие окрестности множеств A_j' и B_j', что $[OA_j'] \cap [OB_j'] = \phi$. Существуют перегородки C_j' между $X_1 \cap [OA_j']$ и $X_1 \cap [OB_j']$ в X_1 такие, что $\bigcap_j C_j' = \phi$. Продолжим перегородки C_j' до перегородок C_j между множествами A_j' и B_j' в пространстве X так, что $C_j \cap X_1 = C_j'$. Это возможно в силу наследственной нормальности пространства X. Тогда множество $\bigcap_j C_j = F$ содержится в $\overline{X}$ и A-сильно бесконечно-мерно. Действительно, если множество F является A-слабо бесконечно-мерным, то, как выше, с помощью системы ω_2 мы получим перегородки D_k между множествами A_k'', B_k'' в пространстве X, где $\omega_2 = \{A_k'', B_k''\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что $\bigcap_k D_k \subseteq X \setminus F$. Тогда система перегородок $\{C_j, D_k\}_{i,k=1}^{\infty}$ имеет пустое пересечение в X, а это противоречит выбору системы ω. Лемма доказана.

Замечание. Если множество X_1 замкнуто в пространстве X, то в лемме 1 от пространства X вместо наследственной нормальности можно потребовать только счетную паракомпактность. В самом деле, из результатов ([4]) следует, что если множество X_1 замкнуто в пространстве X, то перегородки C_j' можно продолжить до перегородок C_j в X, используя лишь счетную паракомпактность.

Лемма 2. *Пусть X — слабо паракомпактное пространство, $\gamma = \{\Phi_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — замкнутое локально счетное покрытие X и каждое множество Φ_α A-слабо бесконечно-мерно.*

Тогда пространство X также A-слабо бесконечно-мерно.

Доказательство. Отметим, что по теореме Мориты ([6]) пространство X будет счетно паракомпактным. Покрытие γ локально счетно, т. е. для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox такая, что $Ox = \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_{\alpha_i}$. Система $\{Ox\}$ является покрытием пространства X. Существует точечно конечное открытое покрытие $U = \{u_\alpha | \alpha \in B\}$, вписанное в покрытие $\{Ox\}$, а также открытое покрытие $\omega = \{v_\alpha | \alpha \in B\}$ такое, что $v_\alpha \subseteq [v_\alpha] \subseteq u_\alpha$. По теореме суммы Левшенко ([4]) каждое замкнутое множество $[v_\alpha]$ A-слабо бесконечно-мерно. Обозначим через T_k множество, состоящее из всех тех точек, каждая из которых принадлежит не более чем k элементам покрытия ω. Множество T_k, очевидно, замкнуто и $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$. Докажем, что множество T_k A-слабо бесконечно-мерно для каждого k. Множество T_1 является дискретной системой замкнутых множеств $F_\alpha \subseteq v_\alpha$, поэтому множество T_1 A-слабо бесконечно-мерно. Пусть множества T_i A-слабо бесконечно-мерны для $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Покажем, что множество T_{k+1} также A-слабо бесконечно-мерно. Возьмем такое замкнутое в T_{k+1} множество Φ, что $\Phi \cap T_k = \phi$. По теореме Зарелуа ([3]) множество Φ является телом дискретной замкнутой системы, вписанной в ω, и, следовательно, множество Φ будет A-слабо бесконечно-мерным. В силу замечания к лемме 1, множество T_{k+1} A-слабо бесконечно-мерно. По теореме суммы пространство X также A-слабо бесконечно-мерно.

Лемма 3. *Пусть X есть S-слабо бесконечно-мерное слабо паракомпактное полное в смысле Чеха пространство, Y — A-сильно бесконечно-мерное слабо паракомпактное пространство, f: $X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение пространства X на пространство Y.*

Тогда существует точка $y \in Y$ такая, что $|f_y^{-1}| > \aleph_0$.

Доказательство. По теореме Архангельского ([1]) в пространстве X существует ω-система $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$*. В силу слабой паракомпактности пространства X каждую систему $\gamma_i = \{H_\alpha^i | \alpha \in \mathfrak{A}_i\}$ можно считать состоящей из канонических замкнутых множеств, составляющих точечно конечное покрытие пространства X, причем система $\{\operatorname{Int} H_\alpha^i | \alpha \in \mathfrak{A}_i\}$ является также покрытием. По лемме Скляренко ([5]) существуют замкнутые подмножества X_0 и X_1 пространства X такие, что $X_0 \cap X_1 = \phi$ и $fX_0 = fX_1 = Y_1$, где множество Y_1 сильно бесконечно-мерно. Покажем, что существуют такие замкнутые подмножества пространства X, обозначаемые через X_0' и X_1', и такое замкнутое A-сильно бесконечно-мерное подмножество $Y_1' \subseteq Y$, что $X_j' \subseteq H_{\alpha j}^1$ для $j = 0, 1$ и $fX_j' = Y_1'$. Положим для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}_1$ замкнутое множество $\hat{H}_\alpha^1 = X_0 \cap H_\alpha^1$. Тогда $X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, где множества T_k рассматриваются относительно покрытия $\{\operatorname{Int} \hat{H}_\alpha^1 | \alpha \in \mathfrak{A}_1\}$. В силу равенства $Y_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} fT_k$ и теоремы суммы для A-слабо бесконечно-мерных пространств, существует множество T_n такое, что множество fT_n A-сильно бесконечно-мерно. Пусть множество fT_{n-1} A-слабо бесконечно-мерно, тогда по замечанию к лемме 1 существует замкнутое в Y A-сильно бесконечно-мерное множество $\Phi \subseteq fT_n \setminus fT_{n-1}$. Очевидно, $f^{-1}\Phi \cap T_n \subseteq T_n \setminus T_{n-1}$. По теореме Зарелуа [3] множество $f^{-1}\Phi \cap T_n$ распадается во вписанную в покрытие $\{\operatorname{Int} \hat{H}_\alpha^1 | \alpha \in \mathfrak{A}_1\}$ дискретную систему β замкнутых множеств F_α. Следовательно, система $\{fF_\alpha\}$ либо локально счетна, и тогда в силу леммы 2 существует A-сильно бесконечно-мерное множество fF_{α_0}, где $F_{\alpha_0} \in \beta$, либо система $\{fF_\alpha\}$ не локально счетна на множество Φ, и тогда существует точка $y \in \Phi$, что $|f_y^{-1}| > \aleph_0$. Положим

* Система $\gamma = \{v_i\}$ счетного множества открытых покрытий γ_i называется ω-системой, если для любой центрированной системы замкнутых множеств $\varphi = \{\Gamma_\alpha\}$ такой, что для бесконечного множества значений индекса i найдутся $\Gamma_{\alpha_i} \in \varphi$, $H_\alpha^i \in \gamma_i$ и $\Gamma_{\alpha_i} \subseteq H_\alpha^i$, множество $\bigcap_\alpha \Gamma_\alpha$ не пусто.

$fF_{\alpha_0} = \hat{Y}_1$, аналогичные рассуждения проведем для множеств $\hat{Y}_1$ и $X_1 \cap f^{-1}\hat{Y}_1$. В результате получим множества X_0', X_1', Y_1' с требуемыми свойствами. Аналогичные построения проведем с множествами X_0', X_1', Y_1' и т. д. Либо мы на каком-то шаге получим точку $y \in Y$ такую, что $|f^{-1} y| > \aleph_0$, либо получим систему замкнутых множеств $X_{i_1 \ldots i_n}$, где $i_j = 0, 1$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$. Система множеств такова, что $X_{i_1 \ldots i_n} \subseteq X_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ и $X_{i_1 \ldots i_n} \subseteq H_\alpha^n \in \gamma_n$, а для каждого набора $i_1 \ldots i_n$ будет $fX_{i_1 \ldots i_n} = Y_n'$, где множество Y_n' A-сильно бесконечно-мерно. Система $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^\infty$ является ω-системой, поэтому $\bigcap_n X_{i_1 \ldots i_n} \neq \phi$ и тогда $\bigcap_n Y_n' \neq \phi$, а, следовательно, $|f^{-1}y| \geqslant C$ для каждой точки $y \in \bigcap_n Y_n'$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть множество Y^* A-слабо бесконечно-мерно и $\bar{Y} = Y \setminus Y^*$. Для каждой точки $y \in \bar{Y}$ имеем $|fy^{-1}| \leqslant \aleph_0$. По лемме 1 существует замкнутое в Y A-сильно бесконечно-мерное множество $F \subseteq \bar{Y}$. Тогда множества F и $f^{-1}F$ находятся в условиях леммы 3, и, значит, существует точка $y \in F$ такая, что $|fy^{-1}| > \aleph_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Если пространство X метризуемо, то множество $\hat{Y} = \{y \in Y | \; |f^{-1}y| \geqslant C\}$ будет A-сильно бесконечно-мерным. Действительно, по теореме Архангельского [2] пространство $Y = Y_0 \cup Y_1$, где множество Y_0 является σ-дискретным в пространстве Y, а для каждой точки $y \in Y_1$ множество $f^{-1}y$ — компакт. Ясно, что $\dim Y_0 = 0$, и тогда $\hat{Y} = Y^* \cap Y_1$. Как отметил И. К. Лифанов, из замечания Скляренко [5] следует, что нельзя усилить теорему, расширяя классы отображаемых бесконечно-мерных пространств.

Теорема 2. *Пусть X есть S-слабо бесконечно-мерное слабо паракомпактное полное в смысле Чеха пространство, Y — A-сильно бесконечно-мерное слабо паракомпактное пространство, $f\colon X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение пространства X на пространство Y.*

Тогда множество $[Y^*]$, где множество $Y^* = \{y \in Y | \; |f_y^{-1}| > \aleph_0\}$, является A-сильно бесконечно-мерным.

Доказательство. Действительно, пусть множество $[Y^*]$ будет A-слабо бесконечно-мерным. Тогда из замечания к лемме 1 следует существование замкнутого A-сильно бесконечно-мерного множества $F \subseteq Y \setminus [Y^*]$, а это, аналогично доказательству теоремы 1, ведет к противоречию.

В заключение выражаю благодарность Б. А. Пасынкову за постоянную помощь и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, Вестн. Московск. унив., № 2, 37 (1961). [2] А. В. Архангельский, Матем. сборн., 69, № 1, 13 (1966). [3] А. В. Зарелуа, Матем. сборн., 60, № 1, 17 (1963). [4] Б. Т. Левшенко, Вестн. Московск. унив., № 5, 219 (1959). [5] Е. Г. Скляренко, ДАН, 143, № 5, 1053 (1962). [6] K. Morita, Math. Japon., 1, № 1, 60 (1948).