*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2018. Том 59, № 2*

*УДК 512.542*

# К ТЕОРЕМЕ ШЕМЕТКОВА О ДОПОЛНЯЕМОСТИ КОРАДИКАЛА

**С. Йи, С. Ф. Каморников**

**Аннотация.** Формация $\mathfrak{F}$ конечных групп называется *$GWP$-формацией*, если $\mathfrak{F}$-корадикал группы, порожденной двумя $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, порождается их $\mathfrak{F}$-корадикалами. Главная цель работы заключается в нахождении некоторых достаточных условий расщепляемости конечной группы над ее $\mathfrak{F}$-корадикалом.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.210

**Ключевые слова:** конечная группа, формация, $GWP$-формация, дополнение, корадикал, $\mathfrak{F}$-субнормальность.

## 1. Введение

Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала, характеризующее степень вхождения группы в формацию $\mathfrak{F}$, естественным образом инициировало исследование проблемы расщепляемости группы над $\mathfrak{F}$-корадикалом. Центральное место в решении этой проблемы занимает следующий результат Л. А. Шеметкова из [1, 2].

*Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $G$ — конечная группа. Если для любого простого числа $p$, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская $p$-подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в $G$.*

Универсальность приведенной теоремы проявляется в следующем:

1) никакие ограничения (кроме абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала) на конечную группу $G$ не налагаются;

2) теорема справедлива для произвольной локальной формации $\mathfrak{F}$;

3) она включает в себя практически все известные результаты о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов (в том числе теорему Шура — Цассенхауза о дополняемости нормальной холловой подгруппы; теорему Гашюца о дополняемости абелева $\mathfrak{F}$-корадикала [3]; теорему Ф. Холла о дополняемости коммутанта разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами; теорему Хупперта [4] о дополняемости $\mathfrak{N}_p$-корадикала, обладающего абелевой силовской $p$-подгруппой).

Как показывают примеры, условие абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала в приведенной теореме Л. А. Шеметкова существенно. Поэтому одним из подходов, направленным на ослабление абелевости, может быть введение дополнительных ограничений либо на группу $G$, либо на формацию $\mathfrak{F}$. Такой подход, инициированный работой [5], в последнее время получил развитие в [6–9]. В рамках этого подхода выполнена и данная работа. В ней для произвольной $GWP$-формации $\mathfrak{F}$ исследуется существование дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу группы, порожденной системой ее $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных

The first author was supported by Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant LY18A010028).

подгрупп. Таким образом, условие абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала всей группы $G$ в отмеченной теореме Л. А. Шеметкова ослабляется до условия абелевости силовских подгрупп из $\mathfrak{F}$-корадикалов $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, порождающих группу $G$. Главная цель работы — доказательство следующих двух теорем.

**Теорема 1.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — конечная группа, обладающая следующими свойствами:*

1) *$G = \langle A, B \rangle$, где $A$ и $B$ — $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы $G$;*

2) *для некоторого простого числа $p$ силовские $p$-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы.*

*Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов.*

**Теорема 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — конечная группа, представимая в виде $G = \langle A, B \rangle$, где $A$ и $B$ — $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы $G$. Если подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимы и для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские $p$-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы $G$ является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в группе $G$.*

## 2. Определения и используемые результаты

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [10, 11].

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп $N$ группы $G$, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы $G$).

**Лемма 2.1** [10, лемма 1.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и $N$ — нормальная подгруппа группы $G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$;

2) *если $G = HN$, то $H^{\mathfrak{F}}N = G^{\mathfrak{F}}N$.*

Подгруппа $H$ группы $G$ называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, где $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i =1, 2, \ldots, n$.

Другая концепция, развивающая идею транзитивного замыкания нормальности и объединяющая субнормальные и $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы, основана на следующем определении.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, то подгруппа $H$ группы $G$ называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля* (или просто *$K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной*), если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа $H_{i-1}$ нормальна в $H_i$, либо $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i =1, 2, \ldots, n$.

Отметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда она субнормальна в $G$.

Следующие три леммы содержат информацию об общих свойствах $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Доказательство этих лемм можно найти в [12, 13].

**Лемма 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Пусть $H$ и $N$ — подгруппы группы $G$, причем подгруппа $N$ нормальна в $G$. Тогда*

1) *если подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в группе $G$, то подгруппа $HN/N$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/N$, а подгруппа $HN$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$;*

2) *если $N \subseteq H$, то подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда подгруппа $H/N$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/N$.*

**Лемма 2.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G$ содержится в подгруппе $H$, то $H$ — $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы $G$;*

2) *если $H$ и $D$ — подгруппы группы $G$, причем подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$, то подгруппа $H \cap D$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $D$;*

3) *если подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $D$ и подгруппа $D$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$, то подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$.*

**Лемма 2.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если подгруппа $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$, то подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в $G$.*

Говорят [12], что формация $\mathfrak{F}$ *индуцирует функтор Виландта на $\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах*, если $\langle A, B\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle$ для любых двух $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп $A$ и $B$ каждой группы $G$. В книге [13] такая формация называется *формацией, обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов*, или, сокращенно, *$GWP$-формацией* (*the formation with generalised Wielandt property for residuals*).

Каждая $GWP$-формация $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией Фиттинга [12], т. е. она замкнута относительно взятия подгрупп и, кроме того, из $G = AB$, где $A$ и $B$ — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из $G$, всегда вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$. Кроме того, как следует из [14], любая $GWP$-формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, т. е. замкнута относительно взятия фраттиниевых расширений. Отсюда ввиду [13, теорема 6.5.45] формация $\mathfrak{F}$ является $GWP$-формацией тогда и только тогда, когда $\langle A, B\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle$ для любых двух $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп $A$ и $B$ каждой группы $G$.

Из определения класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ следует, что в любой группе $G$ существует *$\mathfrak{F}$-радикал* $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из $G$, принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из $G$). В дальнейшем будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы с ее $\mathfrak{F}$-радикалом.

**Лемма 2.5** [12, лемма 3.3.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация. Тогда любая $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы $G$ содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале $G_{\mathfrak{F}}$.*

В [15] описаны все разрешимые $GWP$-формации. Достаточно широкие классы неразрешимых $GWP$-формаций представлены в [15, 16]. В общем случае проблема перечисления всех $GWP$-формаций остается открытой.

В то же время $GWP$-формация всегда *решеточная* [15], т. е. обладает тем свойством, что множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы. Таким образом, все $GWP$-формации лежат в классе всех наследственных насыщенных решеточных формаций, которые описаны в [17].

**Лемма 2.6** [17]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ решеточная, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) *существует такое разбиение* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{H})$ *на попарно не пересекающиеся подмножества, что* $\mathfrak{H} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ *— наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;

4) *всякая нециклическая* $\mathfrak{M}$*-критическая группа* $G$ *с единичной подгруппой Фраттини является примитивной группой с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой* $N = G^{\mathfrak{M}}$*, причем* $G/N$ *— циклическая примарная группа.*

Напомним, что если $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство классов групп, то через $\times_{i \in I}\mathfrak{X}_i$ обозначается класс всех групп, которые представимы в виде $H_{i_1} \times \cdots \times H_{i_t}$, где $i_k \in I$, $H_{i_k} \in \mathfrak{X}_{i_k}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, t$. Через $\mathfrak{S}$ далее обозначается формация всех разрешимых групп (соответственно $\mathfrak{S}_\pi$ — формация всех разрешимых $\pi$-групп, где $\pi$ — некоторое множество простых чисел).

Пусть $\mathrm{P}$ — множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathrm{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией.*

Для формационной функции $f$ главный фактор $A/B$ группы $G$ называется $f$*-центральным* ($f$*-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}_G(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп $G$ таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор $A/B$ группы $G$ $f$-централен. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции* $f$, а $f$ — *локальное определение* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{N}_p$ — класс всех $p$-групп, $f$ — формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда функция $f$ называется

(a) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(c) *канонической*, если она полная и внутренняя.

Как показано в [11, теорема IV.3.7], для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция $f$ такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Следуя определению 5.5 из [10], главный фактор $H/K$ будем называть $\mathfrak{F}$*-центральным* ($\mathfrak{F}$*-эксцентральным*), если $H/K$ $f$-централен (соответственно $f$-эксцентрален) для некоторого внутреннего локального определения $f$ формации $\mathfrak{F}$.

Далее понадобится следующая информация о главных факторах $\mathfrak{F}$-корадикала. При этом под главным *pd-фактором* группы понимается главный фактор, порядок которого делится на простое число $p$.

**Лемма 2.7** [10, теорема 11.6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если для некоторого простого числа $p$ силовская $p$-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.*

**Лемма 2.8** [9, лемма 1.8]. *Если $G = \langle A, B\rangle$, где $A$ и $B$ — субнормальные подгруппы группы $G$, и для некоторого простого числа $p$ подгруппа $A^{\mathfrak{N}}$ не содержит $A$-главных центральных $pd$-факторов, а подгруппа $B^{\mathfrak{N}}$ не содержит $B$-главных центральных $pd$-факторов, то $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных центральных $pd$-факторов.*

Следуя [10], приведем определение $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной конечной группы для случая, когда $\mathfrak{F}$ — локальная формация.

Нормальная подгруппа $R$ группы $G$ называется *$\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой*, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы $G$. Максимальная подгруппа $M$ группы $G$ называется *$\mathfrak{F}$-критической* в $G$, если в $G$ найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа $R$, что $MR = G$. Подгруппа $H$ называется *$\mathfrak{F}$-нормализатором* группы $G$, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G,$$

в которой подгруппа $H_{i-1}$ $\mathfrak{F}$-критична в $H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. По определению каждая группа $G$ обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Для доказательства теоремы 1.2 понадобится также следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-нормализаторов.

Пусть $H$ — подгруппа, а $A/B$ — нормальный фактор группы $G$. Говорят, что

1) $H$ *покрывает* фактор $A/B$, если $A \subseteq HB$;

3) $H$ *изолирует* фактор $A/B$, если $H \cap A \subseteq B$.

**Лемма 2.9** [10, следствие 21.1.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $G$ — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если $F$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы $G$, то $F$ покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы $G$.*

### 3. Доказательство теоремы 1.1

Если $p$ не принадлежит $\pi(\mathfrak{F})$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем далее, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что теорема неверна. Пусть $G$ — группа, которая удовлетворяет условию теоремы, но не удовлетворяет ее заключению, причем для группы $G$ с такими свойствами натуральное число $t = |G| + |G : A| + |G : B|$ минимальное. Понятно, что $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Если $G = A$, то по условию теоремы силовские $p$-подгруппы из $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}$ абелевы, а значит, ввиду леммы 2.7 $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов; противоречие. Поэтому полагаем далее, что $G \neq A$ и $G \neq B$.

Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Если $N$ не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$, то ввиду леммы 2.1 имеем $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N \simeq G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда на основании выбора группы $G$ следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов; противоречие. Значит, любая минимальная нормальная подгруппа группы $G$ содержится в подгруппе $G^{\mathfrak{F}}$. Более того, в силу выбора группы $G$ $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/N$ группы $G/N$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов.

Если $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, отличная от $N$, то аналогично показывается, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/L$ группы $G/L$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов. Но тогда ввиду изоморфизма $G^{\mathfrak{F}}/N \cap$

$L \simeq G^{\mathfrak{F}}$ следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов. Получили противоречие с выбором группы $G$.

Итак, $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, причем $N$ содержится в $G^{\mathfrak{F}}$. При этом каждый главный $pd$-фактор группы $G$ на участке от $N$ до $G^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Так как для группы $G$ теорема неверна, минимальная нормальная подгруппа $N$ группы $G$ является $pd$-подгруппой, которая $\mathfrak{F}$-центральна в $G$. Если $f$ — каноническое локальное определение формации $\mathfrak{F}$, то $G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$, а потому $N \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$. Отсюда следует, в частности, что $N$ — абелева $p$-группа.

Предположим, что $A^{\mathfrak{F}} = 1$. Так как $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация, ввиду $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальности подгруппы $A$ в $G$ и того, что $A \in \mathfrak{F}$, на основании леммы 2.5 имеем $A \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G = AB = G_{\mathfrak{F}}B$. Отсюда $G^{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}$, а значит, в силу леммы 2.7 подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов; противоречие. Поэтому полагаем далее, что $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $B^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Обозначим $D = A^{\mathfrak{F}} \cap N$. Предположим, что $D \neq 1$. Согласно [10, теорема 4.7] $f(p)$ является наследственной формацией. Поэтому из $G/C_G(N) \in f(p)$ следует, что $AC_G(N)/C_G(N) \in f(p)$. Ввиду изоморфизма $AC_G(N)/C_G(N) \simeq A/A \cap C_G(N) = A/C_A(N)$ имеем, что $A/C_A(N) \in f(p)$. Поскольку $C_A(N) \subseteq C_A(D)$, то $A/C_A(D) \in f(p)$. Следовательно, все $A$-главные факторы подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ на отрезке $[1, D]$ $\mathfrak{F}$-центральны в $A$. Пришли к противоречию с леммой 2.7. Таким образом, $A^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Аналогично показывается, что $B^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$.

Так как $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация, $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$. Ввиду леммы 2.4 подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в группе $G$. Кроме того, силовские $p$-подгруппы из $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ и $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ абелевы, а значит, по лемме 2.7 подгруппа $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ не содержит $A^{\mathfrak{F}}$-главных центральных $pd$-факторов, а подгруппа $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ не содержит $B^{\mathfrak{F}}$-главных центральных $pd$-факторов. Поэтому по лемме 2.8 $\mathfrak{N}$-корадикал $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ группы $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит $G^{\mathfrak{F}}$-главных центральных $pd$-факторов. Следовательно, $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$. Если $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \neq 1$, то группа $G^{\mathfrak{F}}$ содержит минимальную нормальную подгруппу, отличную от $N$; противоречие. Поэтому $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} = 1$, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ — нильпотентная подгруппа группы $G$. Так как $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, в частности, $G^{\mathfrak{F}}$ — $p$-группа.

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ решеточная, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям 1–4 леммы 2.6. Поэтому из $p \in \pi(\mathfrak{F})$ следует, что либо $p \in \pi(\mathfrak{M})$, либо $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$.

Если $p \in \pi(\mathfrak{M})$, то из строения формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $G/G^{\mathfrak{F}} = (S/G^{\mathfrak{F}}) \times (F/G^{\mathfrak{F}})$, где $S/G^{\mathfrak{F}}$ — холлова $\pi(\mathfrak{M})$-подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{F}}$, принадлежащая формации $\mathfrak{M}$, и $F/G^{\mathfrak{F}}$ — холлова $\pi(\mathfrak{H})$-подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{F}}$, принадлежащая формации $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — $p$-группа, где $p \in \pi(\mathfrak{M})$, то $S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$, то из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G/G^{\mathfrak{F}} = (S/G^{\mathfrak{F}}) \times (F/G^{\mathfrak{F}})$, где $S/G^{\mathfrak{F}}$ — разрешимая холлова $\pi_i$-подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{F}}$ и $F/G^{\mathfrak{F}}$ — холлова $\pi_i'$-подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{F}}$, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$. Поскольку формация $\mathfrak{S}_{\pi_i}$ замкнута относительно расширений и $G^{\mathfrak{F}}$ — $p$-группа, где $p \in \pi_i$, то $S \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$.

Итак, в обоих случаях группа $G/G^{\mathfrak{F}}$ представима в виде $G/G^{\mathfrak{F}} = (S/G^{\mathfrak{F}}) \times (F/G^{\mathfrak{F}})$, где $S/G^{\mathfrak{F}}$ и $F/G^{\mathfrak{F}}$ — холловы подгруппы группы $G/G^{\mathfrak{F}}$, принадлежащие формации $\mathfrak{F}$. Более того, $S \in \mathfrak{F}$.

Рассмотрим подгруппы $AG^{\mathfrak{F}}$ и $BG^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 2.2 они $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальны в группе $G$. Кроме того, $G = \langle AG^{\mathfrak{F}}, BG^{\mathfrak{F}} \rangle$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является

$GWP$-формацией, то $(AG^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} = \langle A, G^{\mathfrak{F}}\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}}\rangle = A^{\mathfrak{F}}$ и $(BG^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}$, т. е. $\mathfrak{F}$-корадикалы подгрупп $AG^{\mathfrak{F}}$ и $BG^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Если либо $A \subset AG^{\mathfrak{F}}$, либо $B \subset BG^{\mathfrak{F}}$, то

$$|G| + |G : AG^{\mathfrak{F}}| + |G : BG^{\mathfrak{F}}| < t$$

и ввиду выбора группы $G$ и ее подгрупп $A$ и $B$ имеем, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов; противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$. Отсюда, в частности, следует, что подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ нормальны в $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle$, то $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.

Ввиду изоморфизма

$$G^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} \simeq B^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} \cap B^{\mathfrak{F}}$$

и абелевости подгруппы $B^{\mathfrak{F}}$ получаем, что коммутант $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}]$ группы $G^{\mathfrak{F}}$ содержится в $A^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}]$ — нормальная подгруппа группы $G$. Если $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}] \neq 1$, то из единственности в $G$ минимальной нормальной подгруппы $N$ имеем, что $N \subseteq [G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}] \subseteq A^{\mathfrak{F}}$. Пришли к противоречию с тем, что $A^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Следовательно, $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}] = 1$, т. е. подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ абелева. Но тогда по лемме 2.7 $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов. Снова пришли к противоречию с выбором группы $G$. Теорема доказана.

## 4. Доказательство теоремы 1.2

Очевидно, множество $\mathfrak{H}$ всех $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимых групп является формацией Фиттинга. Так как $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация, $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle$. Ввиду леммы 2.4 подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в группе $G$. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle \subseteq G_{\mathfrak{H}}$, т. е. подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешима.

Пусть $F$ — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы $G$. На основании теоремы 1.1 все $G$-главные факторы группы $G^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-эксцентральны в $G$.

Пусть

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G^{\mathfrak{F}} \tag{1}$$

— некоторый $G$-главный ряд подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 2.9 $\mathfrak{F}$-нормализатор $F$ изолирует все факторы ряда (1), т. е. $F \cap H_i \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$F \cap G^{\mathfrak{F}} = F \cap H_n \subseteq F \cap H_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq F \cap H_0 = 1,$$

т. е. $F \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Кроме того, из определения $\mathfrak{F}$-нормализатора вытекает, что справедливо равенство $FG^{\mathfrak{F}} = G$. Значит, $\mathfrak{F}$-нормализатор $F$ является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе $G$. Теорема доказана.

## 5. Следствия

На основании индукции по числу $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, порождающих группу $G$, имеем

**Следствие 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — группа, обладающая следующими свойствами:*

*1) $G = \langle A_1, A_2, \dots, A_n\rangle$, где $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ — $K$- $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы $G$;*

*2) для некоторого простого числа $p$ и каждого $i = 1, 2, \dots, n$ силовские $p$-подгруппы из $A_i^{\mathfrak{F}}$ абелевы.*

*Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$ не содержит $G$-главных $\mathfrak{F}$-центральных $pd$-факторов.*

**Следствие 5.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — группа, обладающая следующими свойствами:*

1) $G = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, *где* $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ — $K$-$\mathfrak{F}$-*субнормальные подгруппы группы* $G$;

2) *для любого простого числа* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *и каждого* $i = 1, 2, \dots, n$ *силовские* $p$-*подгруппы из* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *абелевы.*

*Если подгруппа* $A_i^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-*разрешима для любого* $i = 1, 2, \dots, n$, *то каждый* $\mathfrak{F}$-*нормализатор группы* $G$ *является дополнением* $\mathfrak{F}$-*корадикала* $G^{\mathfrak{F}}$ *в группе* $G$.

В качестве следствий теорем 1.1 и 1.2 приведем два частных результата.

**Следствие 5.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — группа, обладающая следующими свойствами:*

1) $G = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, *где* $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ — $K$-$\mathfrak{F}$-*субнормальные подгруппы группы* $G$;

2) *для каждого* $i = 1, 2, \dots, n$ *подгруппа* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *абелева.*

*Тогда* $\mathfrak{F}$-*корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ *группы* $G$ *не содержит* $G$-*главных* $\mathfrak{F}$-*центральных факторов.*

**Следствие 5.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — группа, обладающая следующими свойствами:*

1) $G = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, *где* $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ — $K$-$\mathfrak{F}$-*субнормальные подгруппы группы* $G$;

2) *для каждого числа* $i = 1, 2, \dots, n$ *подгруппа* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *абелева.*

*Тогда каждый* $\mathfrak{F}$-*нормализатор группы* $G$ *является дополнением* $\mathfrak{F}$-*корадикала* $G^{\mathfrak{F}}$ *в группе* $G$.

Как отмечено выше, субнормальные и $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальны для любой формации $\mathfrak{F}$.

**Следствие 5.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — группа, обладающая следующими свойствами:*

1) $G = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, *где* $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ — *субнормальные подгруппы группы* $G$;

2) *для любого простого числа* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *и каждого* $i = 1, 2, \dots, n$ *силовские* $p$-*подгруппы из* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *абелевы.*

*Если подгруппа* $A_i^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-*разрешима для любого* $i = 1, 2, \dots, n$, *то каждый* $\mathfrak{F}$-*нормализатор группы* $G$ *является дополнением* $\mathfrak{F}$-*корадикала* $G^{\mathfrak{F}}$ *в группе* $G$.

**Следствие 5.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $GWP$-формация и $G$ — группа, обладающая следующими свойствами:*

1) $G = \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, *где* $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ — $\mathfrak{F}$-*субнормальные подгруппы группы* $G$;

2) *для любого простого числа* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *и каждого* $i = 1, 2, \dots, n$ *силовские* $p$-*подгруппы из* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *абелевы.*

*Если подгруппа* $A_i^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-*разрешима для любого* $i = 1, 2, \dots, n$, *то каждый* $\mathfrak{F}$-*нормализатор группы* $G$ *является дополнением* $\mathfrak{F}$-*корадикала* $G^{\mathfrak{F}}$ *в группе* $G$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Шеметков Л. А.* О формационных свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1324–1327.

**2.** *Шеметков Л. А.* Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.

**3.** *Gaschütz W.* Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. V. 190. P. 93–107.
**4.** *Huppert B.* Subnormale Untergruppen und $p$-Sylowgruppen // Acta Sci. Math. Szeged. 1961. V. 22. P. 46–61.
**5.** *Каморников С. Ф.* О дополнениях корадикала конечной группы // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2013. № 6. С. 17–23.
**6.** *Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.* О существовании дополнений к корадикалам конечных групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 122–127.
**7.** *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* О дополнениях к корадикалам конечных групп // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 6. С. 27–52.
**8.** *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V.* On complements of $\mathfrak{F}$-residuals of finite groups // Comm. Algebra. 2017. V. 45, N 1. P. 878–882.
**9.** *Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.* О дополнении корадикала конечной группы // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 4. С. 58–64.
**10.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
**11.** *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
**12.** *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорус. наука, 2003.
**13.** *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
**14.** *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V.* On formations of finite groups with the generalised Wielandt property for residuals // J. Algebra. 2014. V. 412. P. 173–178.
**15.** *Каморников С. Ф.* Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$-субнормальность // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1065–1080.
**16.** *Каморников С. Ф.* Об одной задаче теории формаций // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1332–1340.
**17.** *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.

*Статья поступила 1 августа 2017 г.*

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Departament of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China
`yixiaolan2005@126.com`

Каморников Сергей Федорович
Гомельский гос. университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
`sfkamornikov@mail.ru`