УДК 512.542

С. Ф. КАМОРНИКОВ

ДОПОЛНЯЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В РЕШЕТКАХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»

(Поступила в редакцию 23.03.2012)

В работе исследуются дополняемые элементы в решетках регулярных подгрупповых функторов. Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [1, 2].

Пусть X – непустой класс конечных групп. Отображение θ, сопоставляющее каждой группе $G\in X$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым X-функтором (или, иначе, подгрупповым функтором на X), если для любого изоморфизма φ каждой группы $G\in X$ выполняется равенство $(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$.

Подгрупповой X-функтор θ называется регулярным, если для любого эпиморфизма $\varphi\colon A\to B$, где $A, B\in X$, имеют место включения $(\theta(A))^{\varphi}\subseteq\theta(B)$, $(\theta(B))\varphi^{-1}\subseteq\theta(A)$ и, кроме того, $G\in\theta(G)$ для любой группы G из X. В случае, когда класс X является гомоморфом (т. е. X замкнут относительно взятия факторгрупп), регулярность подгруппового X-функтора θ означает, что для любой нормальной подгруппы N группы $G\in X$ всегда выполняются следующие условия:

1) из $H\in\theta(G)$ следует $HN/N\in\theta(G/N)$;

2) из $H/N\in\theta(G/N)$ следует $H\in\theta(G)$.

Пусть n – произвольное натуральное число. Подгруппа H группы G называется n-максимальной, если для любой максимальной цепи

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k = G$$

имеет место неравенство $k \le n$ и при этом найдется, по крайней мере, одна максимальная цепь длины n, соединяющая подгруппу H с группой G.

Пусть θ – подгрупповой X-функтор, который выделяет в каждой группе $G\in X$ множество $\theta(G)$, содержащее группу G и некоторые ее k-максимальные подгруппы для $k \le n$ (при этом число k может быть меньше n). Такой подгрупповой X-функтор будем называть n-максимальным подгрупповым функтором на X. Множество всех n-максимальных подгрупповых функторов на X обозначим через $M^n(X)$.

Если $n = 1$, то, следуя [1], n-максимальный подгрупповой X-функтор будем называть m-функтором на X.

Пусть далее X – непустой гомоморф. Выделим в множестве $M^n(X)$ всех n-максимальных подгрупповых X-функторов подмножество $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ всех регулярных подгрупповых X-функторов. Таким образом, $\theta \in M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ тогда и только тогда, когда θ является одновременно регулярным и n-максимальным подгрупповым X-функтором.

На множестве $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ введем частичный порядок $\le$, полагая, что отношение $\theta_1 \le \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in X$ справедливо включение $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$.

Для совокупности $\{\theta_i \mid i\in I\}$ X-функторов из $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ определим их пересечение $\theta = \bigcap_{i\in I}\theta_i$ следующим образом: $\theta(G) = \bigcap_{i\in I}\theta_i(G)$ для любой группы $G\in X$. Аналогично для совокупности $\{\tau_j \mid j\in J\}$

X-функторов из $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ определим объединение $\tau = \bigcup_{j\in J} \tau_j$ следующим образом: $\tau(G) = \bigcup_{j\in J} \tau_j(G)$ для любой группы $G\in X$. Простая проверка показывает, что θ и τ – регулярные n-максимальные подгрупповые функторы на X. Эти функторы являются соответственно точной нижней гранью множества $\{\theta_i \mid i\in I\}$ и точной верхней гранью множества $\{\tau_j \mid j\in J\}$ в $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$. Следовательно, $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ – полная решетка.

Решетка $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ является бесконечно дистрибутивной. Единицей ее является подгрупповой функтор 1_X, выделяющий в каждой группе $G\in X$ все ее k-максимальные подгруппы (для всех $k\le n$), а нулем – подгрупповой функтор 0_X, выделяющий в каждой группе $G\in X$ только саму группу G. Подгрупповые функторы 0_X и 1_X будем называть тривиальными подгрупповыми X-функторами.

Если l и k – натуральные числа и $l\le k$, то, очевидно, $M^l_{\mathrm{reg}}(X)$ – подрешетка решетки $M^k_{\mathrm{reg}}(X)$. Поэтому, если $M^0_{\mathrm{reg}}(X) = \{0_X\}$, то имеет место решеточное включение

$$M^0_{\mathrm{reg}}(X) \subseteq M^1_{\mathrm{reg}}(X) \subseteq \ldots \subseteq M^n_{\mathrm{reg}}(X).$$

Кроме того, $\bigcup_{n=0}^{\infty} M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ – решетка всех регулярных подгрупповых X-функторов. В дальнейшем эту решетку будем обозначать $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$ (в [1] она обозначается $Reg(X)$).

Элемент θ решетки $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ (решетки $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$) называется дополняемым, если в $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ (соответственно в $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$) найдется элемент τ такой, что $\theta\cup\tau = 1_X$ и $\theta\cap\tau = 0_X$. Очевидно, сами элементы 0_X и 1_X являются дополняемыми.

Проблема описания нетривиальных дополняемых элементов в решетке $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$ всех регулярных подгрупповых X-функторов в случае, когда X – непустая формация, впервые сформулирована в монографии А. Н. Скибы [3]. Ее полное решение представлено в работе [4] (см. также теорему 1.4.7 из [1]). Оказалось, что в решетке $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$ нет дополняемых элементов, отличных от 0_X и 1_X.

Совершенно противоположная ситуация складывается в решетке $M^1_{\mathrm{reg}}(X)$. Как показано в [1], эта решетка является булевой, т. е. в ней все элементы дополняемы.

В связи с изложенными результатами естественно возникает задача описания всех дополняемых элементов решетки $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$, занимающей промежуточное место между решетками $M^1_{\mathrm{reg}}(X)$ и $M^\infty_{reg}(X)$. Решение этой задачи дает следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть X – непустой гомоморф, замкнутый относительно конечных прямых произведений. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $M^1_{\mathrm{reg}}(X)$ *– булева решетка;*

2) *если класс X разрешим, то при любом $n\ge 2$ дополняемыми в $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ являются лишь функторы 0_X и 1_X;*

3) *если класс X не является разрешимым, то при $n\ge 2$ в решетке $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ существуют дополняемые элементы, отличные от 0_X и 1_X;*

4) *в решетке $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$ всех регулярных подгрупповых X-функторов дополняемыми являются лишь функторы 0_X и 1_X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) доказано в [1] (теорема 4.1.10).

Пусть X – разрешимый класс. Покажем, что при $n\ge 2$ в решетке $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ дополняемыми элементами являются только функторы 0_X и 1_X.

Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Предположим, что в решетке $M^2_{\mathrm{reg}}(X)$ существует дополняемый элемента θ, отличный от 0_X и 1_X. Тогда найдется нетривиальный X-функтор $\tau\in M^2_{\mathrm{reg}}(X)$ такой, что для любой группы $G\in X$ множество $\theta(G)\cup\tau(G)$ содержит все 2-максимальные и все максимальные подгруппы группы G, а также выполняется равенство $\theta(G)\cap\tau(G) = \{G\}$.

Предположим, что найдется группа $G_1\in X$, которая обладает максимальной подгруппой $A\in\theta(G_1)$, и группа $G_2\in X$, которая обладает максимальной подгруппой $B\in\tau(G_2)$. Так как класс X замкнут относительно прямых произведений, то $G = G_1\times G_2\in X$. Подгруппа $A\times B$ является второй максимальной подгруппой группы G. Поэтому $A\times B\in\theta(G)\cup\tau(G)$. Не нарушая общности рассуждений, можно полагать, что $A\times B\in\theta(G)$. Пусть $N_1 = G_1\times 1$. Рассмотрим факторгруппу G/N_1 и ее подгруппу $(A\times B)N_1/N_1$. Очевидно, $(A\times B)N_1/N_1$ – максимальная подгруппа из G/N_1. Ввиду регулярности функтора θ имеем, что $(A\times B)N_1/N_1\in\theta(G/N_1)$.

Рассмотрим изоморфизм α групп G/N_1 и G_2 такой, что $\alpha((g_1, g_2)N_1) = g_2$. Очевидно, $((A\times B)N_1/N_1)^{\alpha} = B$. Отсюда и из определения подгруппового функтора следует, что $B\in\theta(G_2)$. Пришли к противоречию с тем, что $B\in\tau(G_2)$. Следовательно, все максимальные подгруппы каждой группы $G\in X$ принадлежат $\theta(G)$.

Пусть H – вторая максимальная подгруппа группы $G\in X$. Предположим, что $H\in\tau(G)$. Пусть $C = \mathrm{Core}_G(H)$ и L/C – главный фактор группы G. Рассмотрим подгруппу HL. Так как L не содержится в H, то либо HL – максимальная подгруппа группы G, либо $HL = G$. Если HL – максимальная подгруппа группы G, то ввиду регулярности подгруппового функтора τ имеем, что $HL\in\tau(G)$. Пришли к противоречию с тем, что все максимальные подгруппы группы G принадлежат $\theta(G)$. Если $HL = G$, то ввиду разрешимости группы G подгруппа H является максимальной в G. Снова пришли к противоречию, так как H – вторая максимальная подгруппа группы $G\in X$.

Итак, все вторые максимальные подгруппы любой группы $G\in X$ принадлежат $\theta(G)$, а значит, $\theta = 1_X$. Таким образом, при $n = 2$ в решетке $M^{n}_{\mathrm{reg}}(X)$ дополняемыми элементами являются только функторы 0_X и 1_X.

Применим далее индукцию по n. Как показано выше, при $n = 2$ утверждение 2) теоремы верно. Предположим, что оно верно и при всех $k<n$. Это значит, что для любого $2\le k<n$ в решетке $M^{k}_{\mathrm{reg}}(X)$ дополняемыми элементами являются только функторы 0_X и 1_X.

Предположим, что в решетке $M^{n}_{\mathrm{reg}}(X)$ имеется дополняемый элемент θ, отличный от 0_X и 1_X. Пусть τ его дополнение в решетке $M^{n}_{\mathrm{reg}}(X)$. Тогда для любой группы $G\in X$ справедливы равенства $\theta(G)\cup\tau(G) = 1_X$ и $\theta(G)\cap\tau(G) = \{G\}$. Обозначим через $\theta_1(G)$ множество всех k-максимальных θ-подгрупп группы G для всех $k<n$, а через $\tau_1(G)$ – множество всех k-максимальных τ-подгрупп группы G для всех $k<n$. Простая проверка показывает, что θ_1 и τ_1 – дополняемые элементы решетки $M^{n-1}_{\mathrm{reg}}(X)$. Так как при $k = n - 1$ утверждение 2) теоремы верно по индукции, то либо $\theta_1 = 1_X$, либо $\tau_1 = 1_X$.

Пусть для определенности $\theta_1 = 1_X$. Пусть H – n-максимальная подгруппа группы $G\in X$. Предположим, что $H\in\tau(G)$. Пусть $C = \mathrm{Core}_G(H)$ и L/C – главный фактор группы G. Рассмотрим подгруппу HL. Так как L не содержится в H, то либо HL – k-максимальная подгруппа группы G для некоторого $k<n$, либо $HL = G$. Если HL – k-максимальная подгруппа группы G, то ввиду регулярности подгруппового функтора τ имеем, что $HL\in\tau(G)$. Пришли к противоречию с тем, что все k-максимальные подгруппы группы G для $k<n$ принадлежат $\theta(G)$. Если $HL = G$, то ввиду разрешимости группы G подгруппа H является максимальной в G. Снова пришли к противоречию, так как H – n-максимальная подгруппа группы $G\in$ X и $n\ge 2$.

Итак, все k-максимальные подгруппы любой группы $G\in X$ для любого $k\le n$ принадлежат $\theta(G)$, а значит, $\theta = 1_X$. Таким образом, при любом $n\ge 2$ в решетке $M^{n}_{\mathrm{reg}}(X)$ дополняемыми элементами являются только функторы 0_X и 1_X. Утверждение 2) доказано.

Покажем, что условие разрешимости гомоморфа X в утверждении 2) теоремы существенно и его отбросить нельзя.

Пусть A – простая неабелева группа и $X = \mathrm{form}\,A$ – формация, порожденная группой A. Каждая группа этой формации является конечным прямым произведением групп, изоморфных A.

Пусть θ – отображение, которое выделяет в каждой группе $G\in X$ подгруппу G, все ее максимальные подгруппы, а также все вторые максимальные подгруппы H группы G такие, что $(H/\mathrm{Core}_G(H))(L/\mathrm{Core}_G(H))\neq G/\mathrm{Core}_G(H)$ хотя бы для одного главного фактора $L/\mathrm{Core}_G(H)$ группы G. Пусть τ – отображение, которое выделяет в каждой группе $G\in X$ подгруппу G и все ее вторые максимальные подгруппы H такие, что $(H/\mathrm{Core}_G(H))(L/\mathrm{Core}_G(H)) = G/\mathrm{Core}_G(H)$ для любого главного фактора $L/\mathrm{Core}_G(H)$ группы G.

Очевидно, θ и τ являются подгрупповыми X-функторами. При этом подгрупповые X-функторы θ и τ являются нетривиальными, т. е. они отличны от 0_X и 1_X. Действительно, если $G\cong A$, то θ выделяет в группе G подгруппу G и все ее максимальные подгруппы, а τ выделяет в группе G подгруппу G и все ее вторые максимальные подгруппы.

Покажем, что подгрупповой X-функтор θ является регулярным. Пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы G и пусть $H \in \theta(G)$. Если N содержится в $\mathrm{Core}_G(H)$, то либо $HN/N = H/N = G/N$, либо $HN/N = H/N$ – максимальная подгруппа группы G/N, либо $HN/N = H/N$ – вторая максимальная подгруппа группы G/N, причем для некоторого главного фактора $L/N/\mathrm{Core}_{G/N}(HN/N)$ группы G/N произведение $(HN/N/\mathrm{Core}_{G/N}(HN/N))(L/N/\mathrm{Core}_{G/N}(HN/N))$ отлично от $G/N/\mathrm{Core}_{G/N}(HN/N)$. Поэтому из определения отображения θ следует, что $HN/N \in \theta(G/N)$. Если N не содержится в $\mathrm{Core}_G(H)$, то либо $HN/N = G/N$, либо HN/N – максимальная подгруппа группы G/N. В этом случае также $HN/N \in \theta(G/N)$.

Пусть теперь $H/N \in \theta(G/N)$. Тогда либо $H/N = G/N$, либо H/N – максимальная подгруппа группы G/N, либо H/N – вторая максимальная подгруппа группы G/N, причем для некоторого главного фактора $L/N/\mathrm{Core}_{G/N}(H/N)$ группы G/N произведение $(H/N/\mathrm{Core}_{G/N}(H/N))(L/N/\mathrm{Core}_{G/N}(H/N))$ отлично от $G/N/\mathrm{Core}_{G/N}(H/N)$. Так как $\mathrm{Core}_{G/N}(H/N) = \mathrm{Core}_G(H)/N$, то либо $H = G$, либо H – максимальная подгруппа группы G, либо H – вторая максимальная подгруппа группы G, причем для главного фактора $L/\mathrm{Core}_G(H)$ группы G произведение $(H/\mathrm{Core}_G(H))(L/\mathrm{Core}_G(H))$ отлично от $G/\mathrm{Core}_G(H)$. Отсюда и из определения отображения θ следует, что $H \in \theta(G)$. Следовательно, $\theta \in M^2_{\mathrm{reg}}(X)$.

Аналогично показывается, что τ – регулярный подгрупповой X-функтор, принадлежащий $M^2_{\mathrm{reg}}(X)$.

Из определения отображения θ следует, что подгрупповой X-функтор θ дополняем в решетке $M^2_{\mathrm{reg}}(X)$, причем дополнением к θ является подгрупповой X-функтор τ.

Уточним совокупность $\tau(G)$ подгрупп, выделяемых в группе $G \in X$ функтором τ. Пусть $H \in \tau(G)$ и $H \neq G$. Тогда в группе G найдется такая максимальная подгруппа M, в которой H является максимальной подгруппой. Пусть $C = \mathrm{Core}_G(H)$, $\overline{H} = H/C$ и $\overline{G} = G/C$. Тогда $\overline{G} \in X$ и $\overline{G} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2 \times \ldots \times \overline{A}_n$, где $\overline{A}_i \cong A$ для всех $i \in \{1,2,..., n\}$.

Обозначим $\overline{M} = M/C$. Тогда $\overline{M} \cdot \overline{A}_i = \overline{G}$ для всех $i \in \{1,2,..., n\}$. Значит, $\mathrm{Core}_{\overline{G}}(\overline{M}) = 1$ и $\overline{G}$ – примитивная группа. По теореме Бэра из [5] либо $\overline{G} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, либо $\overline{G} = \overline{A}_1$.

Предположим, что $\overline{G} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$. Рассмотрим подгруппу $\overline{M} \cap \overline{A}_1$. Очевидно, она нормальна в $\overline{M}$. Кроме того, $N_{\overline{G}}(\overline{M} \cap \overline{A}_1)$ содержит $\overline{A}_2$. Поэтому $\overline{M} \cap \overline{A}_1$ – нормальная подгруппа группы $\overline{G}$, а значит, $\overline{M} \cap \overline{A}_1 = 1$. Отсюда следует, что $\overline{H} \cdot \overline{A}_1$ – максимальная подгруппа группы $\overline{G}$. Пришли к противоречию с тем, что $H \in \tau(G)$.

Таким образом, $\overline{G} = \overline{A}_1$.

Следовательно, $H \in \tau(G)$ тогда и только тогда, когда либо $H = G$, либо H – вторая максимальная подгруппа группы G, для которой выполняется условие $G/\mathrm{Core}_G(H) \cong A$.

Утверждение 4) доказано в [4] (см. также теорему 1.4.7 из [1]).

С л е д с т в и е. *Пусть X – непустая формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $M^1_{\mathrm{reg}}(X)$ – *булева решетка;*

2) *если формация X разрешима, то при любом $n \geq 2$ дополняемыми в $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ являются лишь функторы 0_X и 1_X;*

3) *если формация X не является разрешимой, то при $n \geq 2$ в решетке $M^n_{\mathrm{reg}}(X)$ существуют дополняемые элементы, отличные от 0_X и 1_X;*

4) *в решетке $M^\infty_{\mathrm{reg}}(X)$ всех регулярных подгрупповых X-функторов дополняемыми являются лишь функторы 0_X и 1_X.*

Литература

1. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск, 2003.
2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
3. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Гомель, 1997. (Препринт / Гомел. гос. ун-т; № 64).
4. *Воробей Л. А., Каморников С. Ф.* О дополняемых элементах решетки подгрупповых функторов гомоморфа // Вопр. алгебры. Гомель, 1998. Вып. 12. С. 74–77.
5. *Baer R.* // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.

S. F. KAMORNIKOV

COMPLEMENTED ELEMENTS IN THE LATTICES OF REGULAR SUBGROUP FUNCTORS

Summary

In the article the complemented elements in the lattices of regular subgroup functors are investigated.