С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, К σ-проблеме Кегеля–Виландтда,
Матем. заметки, 2021, том 109, выпуск 4, 564–570

DOI: 10.4213/mzm12887

Математические заметки

Том 109 выпуск 4 апрель 2021

УДК 512.542

К σ-проблеме Кегеля–Виландта

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Для произвольного разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел приводится достаточный признак σ-субнормальности подгруппы в конечной группе. Доказывается, что если полное холлово множество типа σ редуцируется в подгруппу H σ-полной конечной группы G, все неабелевы композиционные факторы которой являются либо знакопеременными группами, либо группами Судзуки, либо группами Ри, то H является σ-субнормальной в G.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: конечная группа, σ-субнормальная подгруппа, холлова подгруппа, полное холлово множество, группа Ри.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12887

1. Введение и постановка задачи. В работе рассматриваются только конечные группы.

Кегель в 1962 г. [1] предложил концепцию π-субнормальной подгруппы (π – некоторое множество простых чисел) как подгруппы, пересечения которой со всеми силовскими p-подгруппами группы являются ее силовскими p-подгруппами для любого простого числа p из π. В этой же работе он сформулировал следующую гипотезу: подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G тогда и только тогда, когда она p-субнормальна для любого простого числа p. Виландт (см. [2]) в 1980 г., когда классификация конечных простых групп была практически завершена, включил эту гипотезу в список наиболее важных проблем, требующих решения после завершения классификации. Поэтому с тех пор эту гипотезу называют еще *проблемой Кегеля–Виландта.* Полное решение ее, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было предложено Кляйдманом [3] в 1991 г.

Работа Кляйдмана инициировала в теории конечных групп развитие двух важных направлений. Во-первых, она обратила внимание на необходимость систематического исследования p-субнормальных подгрупп. Во-вторых, она стимулировала развитие концепций, обобщающих концепцию субнормальной подгруппы. Наиболее значимые результаты первого направления представлены в работах [4] и [5] (в первой из них для $p \geqslant 5$ описаны важные свойства p-субнормальных подгрупп; во второй изучены их решеточные свойства).

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № Ф20Р-291.

В рамках второго направления получили развитие несколько новых концепций обобщенной субнормальности (с основными результатами, касающимися некоторых из них, можно ознакомиться в книге [6]). С позиций проблемы Кегеля–Виландта наибольший интерес представляет предложенная Скибой в [7] концепция σ-субнормальности. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G. Далее всегда σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i, $i \in I$, т.е.

$$\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i, \qquad \sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i \neq j.$$

Следуя [8], будем говорить, что группа G является *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Центральное место в теории σ-субнормальных подгрупп занимает следующий вопрос, поставленный Скибой в [8] под номером 19.86 (см. также вопрос 7.2 из [9]).

Проблема 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и G – конечная группа, обладающая холловой σ_i-подгруппой для каждого $i \in I$. И пусть H – такая подгруппа группы G, что $H \cap S_i$ – холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i \in I$ и всякой холловой σ_i-подгруппы S_i группы G. Верно ли, что подгруппа H является σ-субнормальной в G?*

Проблема 1 сегодня называется *σ-проблемой Кегеля–Виландта*. Как отмечено в [10] и [11], более общей по сравнению с ней является следующая проблема 2. Это связано с существованием групп, обладающих несколькими классами сопряженных холловых подгрупп.

Система $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ σ-примарных холловых подгрупп группы G является *полным холловым множеством типа* σ группы G [7], если выполняются следующие два условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \dots \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G, то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, \dots, S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$. Группа G называется *σ-полной*, если она обладает по крайней мере одним полным холловым множеством типа σ (понятно, что для некоторых разбиений σ существуют группы, для которых множество всех полных холловых множеств типа σ является пустым).

Будем говорить, что полное холлово множество $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ типа σ группы G *редуцируется* в подгруппу H группы G, если $H \cap S_i$ – холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \dots, k$ (возможно, что $H \cap S_i = 1$ для некоторых $i = 1, 2, \dots, k$).

Проблема 2. *Пусть σ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ конечной группы G. И пусть H – такая подгруппа из G, что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что H является σ-субнормальной в G?*

Если в σ-проблеме Кегеля–Виландта требуется, чтобы любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцировалось в подгруппу H группы G, то в проблеме 2 речь идет только о полных холловых множествах Σ^g, $g \in G$, для некоторого заданного полного холлового множества Σ группы G. Поэтому положительное решение проблемы 2 всегда приводит к решению σ-проблемы Кегеля–Виландта.

Отметим, что частные аспекты σ-проблемы Кегеля–Виландта рассматривались как для произвольного разбиения σ, так и для некоторых его частных значений. Например, в [10] доказано, что σ-проблема Кегеля–Виландта имеет положительное решение в классе всех конечных групп для разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, где p – простое число. В [11] она решена для для произвольного разбиения σ в классе всех конечных $3'$-групп.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема, расширяющая класс конечных групп, в котором проблемы 1 и 2 имеют положительное решение.

Теорема 1. *Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G – σ-полная конечная группа, все неабелевы композиционные факторы которой являются либо знакопеременными группами, либо группами Судзуки, либо группами Ри. Пусть, кроме того, Σ – полное холлово множество типа σ группы G. Тогда и только тогда подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.*

2. Определения и предварительные результаты. В работе используются определения и обозначения, принятые в [12]. Что касается терминологии теории σ-субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к работам [7] и [9].

Будем использовать следующие обозначения:

- если π – некоторое множество простых чисел, то $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ – множество всех холловых π-подгрупп группы G;
- если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и n – натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I,\ \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;
- $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.
- если подгруппа H p-субнормальна в G, то пишем $H \leqslant_p G$;
- $A : B$ – полупрямое произведение подгруппы A на подгруппу B.

Пусть H – подгруппа σ-полной группы G, $\sigma(G) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ и $\Sigma = \{S_1, \dots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G. Будем говорить, что пара (G, H) является *контрпримером к проблеме* 2, если для любого $g \in G$ полное холлово множество Σ^g редуцируется в H, но подгруппа H не является σ-субнормальной в G. Если при этом пара (G, H) такова, что сумма $|G| + |H|$ минимальна, то контрпример (G, H) будем называть *минимальным контрпримером к проблеме* 2.

Ключом к доказательству теоремы 1 являются следующая лемма, устанавливающая строение минимального контрпримера к проблеме 2 (см. лемму 2.4 в [10]).

Лемма 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Если (G, H) – минимальный контрпример к проблеме 2, то G и H – простые неабелевы группы.*

Замечание 1. Как следует из [3], структура минимального контрпримера к гипотезе Кегеля–Виландта такая же, как в лемме 1, т.е. G и H являются простыми неабелевыми группами.

Дополнительную информацию о строении минимального контрпримера к проблеме 2 дают предложение 2.6 из [10] и теорема 1.1 из [11]. Их мы приведем в виде следующих двух лемм.

Лемма 2. *Для любого разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел группа G из минимального контрпримера (G, H) к проблеме 2 не может быть знакопеременной группой.*

Лемма 3. *Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G – σ-полная конечная $3'$-группа и Σ – полное холлово множество типа σ группы G. Тогда и только тогда подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.*

Нам понадобится также следующий результат из [4] (см. теорему 1.4), касающийся свойств p-субнормальных подгрупп. Следуя [4], будем говорить, что подгруппа H является *силовски p-транзитивной в G*, если H, действуя сопряжением, транзитивно переставляет силовские p-подгруппы из G (т.е. выполняется равенство $G = HN_G(P)$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G).

Лемма 4. *Пусть G – группа, для которой подгруппа $F^*(G)$ является простой. Пусть, кроме того, H – подгруппа в G такая, что $H \leqslant_p G$ для некоторого простого $p \geqslant 5$ и $|H|$ делится на p. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*
(1) *$F^*(G) \subseteq H$;*
(2) *подгруппа $F^*(G) \cap H$ является силовски p-транзитивной в $F^*(G)$ подгруппой и выполняется одно из следующих утверждений:*
 (a) *$F^*(G) \simeq A_n$, $F^*(G) \cap H \simeq A_{n-1}$ и $n = sp^a > p$, где $1 \leqslant s < p$;*
 (b) *$F^*(G) \simeq U_3(5)$, $F^*(G) \cap H \simeq A_7$ и $p = 5$;*
 (c) *$F^*(G) \simeq HS$, $F^*(G) \cap H \simeq M_{22}$ и $p = 5$.*

Необходимую информацию о строении и свойствах групп Ри можно найти в работах [13] и [14]. Далее мы будем использовать результаты этих работ без дополнительных ссылок на них.

Понадобится также следующий теоретико-числовой результат из [15].

Лемма 5. *Пусть p и q – простые числа такие, что $p^m = q^n + 1$ для некоторых натуральных m и n. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*
(1) *$q = 2$, $p = 3$, $n = 3$ и $m = 2$;*
(2) *$q = 2$, $m = 1$, n – степень числа 2 и $p = q^n + 1$ – простое число Ферма;*
(3) *$p = 2$, $n = 1$ и $q = p^m - 1$ – простое число Мерсенна, в частности, m – простое число.*

3. Доказательство теоремы 1. Если подгруппа H σ-полной группы G является σ-субнормальной в G, то ввиду [7; лемма 2.6] любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцируется в подгруппу H.

Докажем обратное утверждение. Пусть (G, H) – минимальный контрпример. Тогда ввиду леммы 1 G и H – простые неабелевы группы. На основании леммы 2 группа G не может быть знакопеременной группой. А так как группа Судзуки является $3'$-группой, то ввиду леммы 3 группа G не является группой Судзуки. Следовательно, по условию теоремы G – группа Ри, т.е. $G \simeq {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ для некоторого натурального числа n.

Из свойств групп Ри следует, что

$$|G| = q^3(q^3+1)(q-1) = q^3(q+1)(q-1)(q-\sqrt{3q}+1)(q+\sqrt{3q}+1).$$

Кроме того, в G содержатся следующие максимальные подгруппы:

(a) $q^3 : (q-1)$;

(b) $2 \times \mathrm{PSL}_2(q)$;

(c) $(2^2 \times D_{(q+1)/2}) : 3$;

(d) $(q-\sqrt{3q}+1) : 6$;

(e) $(q+\sqrt{3q}+1) : 6$;

(f) ${}^2G_2(q_0)$, где $q = q_0^r$, r – простое число.

Отметим еще, что если $S \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ и $|\pi| > 1$, то

$$|S| \in \bigl\{q^3 \cdot (q-1)_{2'}, q \pm \sqrt{3q}+1, (q-1)_{2'}, (q+1)_{2'}, 2(q+1)\bigr\}.$$

При этом холловы подгруппы порядков $q \pm \sqrt{3q}+1$, $(q-1)_{2'}$ и $(q+1)_{2'}$ являются циклическими.

Из описания максимальных подгрупп группы G и леммы 1 следует, что возможны только два случая.

Случай 1: $H \simeq \mathrm{PSL}_2(q)$. Порядок подгруппы H равен $q(q-1)(q+1)/2$, и она содержит диэдральную подгруппу порядка $q+1$. Ввиду леммы 5 число $q+1$ не является степенью числа 2. Поэтому из равенства $q = 3^{2n+1}$ следует, что множество $\pi((q+1)_{2'})$ содержит простое число $r \geqslant 5$. Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что r принадлежит компоненте σ_1 разбиения σ. Из описания холловых подгрупп группы G следует, что $\sigma_1 \subseteq \pi((q+1)_{2'})$. Пусть S – холлова σ_1-подгруппа группы G, содержащая подгруппу R. По условию $S \cap H$ – холлова σ_1-подгруппа группы H. Если R_1 – силовская r-подгруппа из H, то из цикличности S следует, что $R_1 \subseteq R$. Поэтому $R \cap H = R_1$, т.е. подгруппа H является r-субнормальной в группе G. Однако это невозможно ввиду леммы 4.

Случай 2: $H \simeq {}^2G_2(3^{(2n+1)/k})$, где k – делитель числа $2n+1$. Рассмотрим сначала случай, когда $2n+1 = p$ – простое число. Тогда группа G обладает максимальной подгруппой ${}^2G_2(3) \simeq \mathrm{SL}_2(8) : 3$. Поэтому $H \simeq \mathrm{SL}_2(8)$. Отметим, что в этом случае силовские 2-подгруппы из H и G имеют одинаковый порядок, равный 8. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что 2 принадлежит компоненте σ_1 разбиения σ. Из описания холловых подгрупп группы G следует, что возможны только два случая:

1) $\sigma_1 = \{2\}$;

2) $|\sigma_1| > 1$ и $\sigma_1 \subseteq \pi(2^2 \times D_{(q+1)/2})$.

Пусть D – силовская 2-подгруппа группы G. Если $\sigma_1 = \{2\}$, то ввиду условия теоремы имеем, что $D^x \subseteq H$ для любого элемента $x \in G$. Но тогда из простоты группы G имеем $G = \langle D^x \mid x \in G\rangle \subseteq H$, что невозможно.

Пусть теперь $|\sigma_1| > 1$ и $\sigma_1 \subseteq \pi(2(q+1))$. Пусть S – холлова σ_1-подгруппа группы G, содержащая подгруппу D. Из строения холловых подгрупп группы G следует, что $S = S_1 \times S_2$, где S_1 – элементарная абелева подгруппа порядка 4, S_2 – холлова σ_1-подгруппа группы диэдра порядка $(p+1)/2$. По условию $S \cap H$ – холлова σ_1-подгруппа группы H. Так как $|G|_2 = |H|_2 = 8$, то любая силовская 2-подгруппа из $S \cap H$ является силовской 2-подгруппой в S. Отсюда и из теоремы о сопряженности силовских подгрупп следует, что $S_1 \subseteq H$. Но тогда из условия теоремы заключаем, что $S_1^x \subseteq H$ для любого элемента $x \in G$. Отсюда и из простоты группы G имеем $G = \langle S_1^x \mid x \in G\rangle \subseteq H$, что невозможно.

Пусть теперь число $2n+1$ является составным. Тогда из строения максимальных подгрупп группы G следует, что либо $H \simeq {}^2G_2(3^{(2n+1)/k})$, где $1 < k < 2n+1$, либо $H \simeq \mathrm{SL}_2(8)$ (в случае, если $k = 2n+1$). Отметим, что в обоих случаях имеет место равенства $|G|_2 = |H|_2 = 8$; в частности, любая силовская 2-подгруппа из H является силовской 2-подгруппой в G. Рассуждая теперь описанным выше способом, мы приходим к окончательному противоречию.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] O. H. Kegel, “Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen”, *Math. Z.*, **78** (1962), 205–221.

[2] H. Wielandt, “Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute”, *The Santa Cruz Conference on Finite Groups*, Proc. Sympos. Pure Math., **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 161–173.

[3] P. B. Kleidman, “A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups”, *Ann. of Math.* (2), **133**:2 (1991), 369–428.

[4] R. Guralnick, P. B. Kleidman, R. Lyons, “Sylow p-subgroups and subnormal subgroups of finite groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **66**:1 (1993), 129–151.

[5] L. M. Ezquerro, M. Gomez, “Finite groups in which all p-subnormal subgroups form a lattice”, *Arch. Math.* (*Basel*), **68** (1997), 1–6.

[6] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Белорусская наука, Мн., 2003.

[7] A. N. Skiba, “On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups”, *J. Algebra*, **436** (2015), 1–16.

[8] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, 19-е изд., Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2018.

[9] A. N. Skiba, “On some results in the theory of finite partially soluble groups”, *Commun. Math. Stat.*, **4**:3 (2015), 281–309.

[10] С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, “О σ-субнормальных подгруппах конечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **61**:2 (2020), 337–343.

[11] С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, “О σ-субнормальных подгруппах конечных $3'$-групп”, *Укр. матем. журн.*, **72**:6 (2020), 806–811.

[12] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, De Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[13] В. М. Левчук, Я. Н. Нужин, “О строении групп Ри”, *Алгебра и логика*, **24**:1 (1985), 26–41.

[14] P. B. Kleidman, “The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups”, *J. Algebra*, **117** (1988), 30–71.

[15] K. Zsigmondy, “Zur Theorie der Potenzreste”, *Monatsh. Math. Phys.*, **3** (1892), 265–284.

С. Ф. Каморников
Гомельский государственный университет имени
Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступило
29.08.2020
Принято к публикации
18.01.2021

В. Н. Тютянов
Международный университет “МИТСО”,
Республика Беларусь
E-mail: vtutanov@gmail.com