ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НАСЛЕДСТВЕННО G-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МИНИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ[1]

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

В работе исследуется строение конечной группы G, все минимальные подгруппы которой являются наследственно G-перестановочными.

Ключевые слова: конечная группа, минимальная подгруппа, G-перестановочная подгруппа, наследственно G-перестановочная подгруппа, сверхразрешимая группа, разрешимая группа.

S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. Finite groups with hereditarily G-permutable minimal subgroups.

In this paper, the structure of a finite group G all of whose minimal subgroups are hereditarily G-permutable is studied.

Keywords: finite group, minimal subgroup, G-permutable subgroup, hereditarily G-permutable subgroup, supersoluble group, soluble group.

MSC: 20D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-102-110

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

В развитие концепции квазиперестановочной подгруппы в [1] были введены следующие два определения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда A называется:

(1) X-перестановочной с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$;

(2) наследственно X-перестановочной с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in X \cap \langle A, B\rangle$.

О п р е д е л е н и е 2. Подгруппа A группы G называется (наследственно) X-перестановочной в G, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Концепция G-перестановочности имеет достаточно ясную интерпретацию на языке теории графов. Для подгруппы A из G пусть $[A]_G = \{A^x | x \in G\}$. Определим *граф перестановочности* $\Gamma_{per}(G)$ группы G как простой неориентированный граф, в котором множество всех вершин совпадает с множеством $Cl(G)$ всех классов сопряженных подгрупп группы G и пара $([A]_G, [B]_G)$ соединяется в $\Gamma_{per}(G)$ ребром тогда и только тогда, когда в $[A]_G$ найдется подгруппа, перестановочная с некоторой подгруппой из класса $[B]_G$.

Простая проверка показывает, что подгруппа A группы G является G-перестановочной в G тогда и только тогда, когда вершина $[A]_G$ содержится в центре $Z(\Gamma_{per}(G))$ графа $\Gamma_{per}(G)$ (вершина графа называется *центральной*, если она смежна со всеми другими вершинами этого

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда (проект Ф23РНФ-237).

графа). Кроме того, подгруппа A будет наследственно G-перестановочной в G в том и только в том случае, когда вершина $[A]_E$ содержится в $Z(\Gamma_{per}(E))$ для каждой подгруппы $E \subseteq G$, содержащей A.

Отметим следующие моменты.

1) 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. Подгруппа A группы G называется *перестановочной* с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется *перестановочной* [2] или *квазинормальной* [3] подгруппой в G (ясно, что любая нормальная подгруппа из G является перестановочной). Перестановочные подгруппы имеют ряд интересных свойств. Так, например, Оре в [3] доказал, что любая перестановочная подгруппа субнормальна (в частности, группа с нетривиальной перестановочной подгруппой не проста). Ито и Сеп усилили этот результат: они доказали в [4], что для каждой перестановочной подгруппы H группы G фактор-группа H/H_G нильпотентна.

2) Для любого $\varnothing \neq X \subseteq G$ (наследственно) X-перестановочная в G подгруппа A группы G является (наследственно) G-перестановочной в G. Обратное неверно. В частности, в группе $G \cong S_3$ силовская 2-подгруппа G-перестановочна в G, но не является перестановочной в G.

В данной работе анализируется влияние G-перестановочных минимальных подгрупп на строение группы G (при этом под *минимальной подгруппой* группы G понимается любая подгруппа простого порядка). По сути, речь идет об установлении нормального строения группы G, для которой все вершины графа перестановочности $\Gamma_{per}(G)$, индуцированные минимальными подгруппами группы G, являются центральными.

Исследования инициированы следующими результатами.

1) *Пусть все минимальные подгруппы группы G нормальны. Тогда G разрешима и ее коммутант G' имеет нормальную силовскую 2-подгруппу, фактор-группа по которой является нильпотентной* (Гашюц, Ито [5, теорема IV.5.7]).

2) *Если все минимальные подгруппы группы G, имеющей нечетный порядок, нормальны, то G сверхразрешима* (Бакли [6]).

Отметим, что указанные результаты неоднократно обобщались. Обзор таких обобщений можно найти, например, в работе [7].

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем, развивающих отмеченные выше результаты Гашюца, Ито и Бакли.

Теорема 1. *Если каждая минимальная подгруппа группы G является наследственно G-перестановочной в G, то G разрешима.*

В общем случае, как следует из [6], группа G, удовлетворяющая условию теоремы 1, не является сверхразрешимой. В то же время имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Если группа G имеет нечетный порядок и каждая ее минимальная подгруппа является наследственно G-перестановочной в G, то G сверхразрешима.*

1. Определения и предварительные результаты

В работе приняты стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [2].

Далее через $\mathfrak{U}$ обозначается класс всех сверхразрешимых групп.

Будем использовать также следующие обозначения:

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G;

$Z(G)$ — центр группы G;

$S(G)$ — разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G;

$G^{\mathfrak{U}}$ — $\mathfrak{U}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой сверхразрешима.

Для описания расширений групп вводятся следующие обозначения:

$A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B;

$A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B.

Если A и B — подгруппы порядка n и m соответственно, то с учетом изложенного понятно обозначение $n : m$.

Минимальная неразрешимая группа — это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа G является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ — *минимальная простая группа*, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [8]. Этот список содержит следующие группы:

$PSL_2(2^p)$, где p — простое число;

$PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;

$PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$;

$PSL_3(3)$;

$Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [5, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

Отметим следующее свойство G-перестановочных подгрупп, доказательство которого осуществляется простой проверкой.

Лемма 1. *Пусть G — группа, H, T и K — ее подгруппы, причем подгруппа K нормальна в G. Если $K \subseteq T$ и H G-перестановочна с T, то HK/K G/K-перестановочна с T/K. В частности, если подгруппа H является наследственно G-перестановочной в G, то подгруппа HK/K является наследственно G/K-перестановочной в G/K.*

Лемма 2. *Пусть T — максимальная подгруппа группы G и $G \neq TR$ для любой собственной подгруппы R из G. Если подгруппа F является G-перестановочной в G, то $F^g \subseteq T$ для некоторого элемента $g \in G$. В частности, $|F|$ делит $|T|$.*

Доказательство вытекает из леммы 1 работы [9]. □

Лемма 3. *Пусть G — минимальная простая группа. Тогда группа G не содержит нетривиальных наследственно G-перестановочных подгрупп.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т. е. группа G содержит нетривиальные наследственно G-перестановочные в G подгруппы. Пусть F — одна из таких подгрупп.

Рассмотрим все пять возможных случаев из списка Томпсона.

1. $G \cong PSL_2(2^p) = PSL_2(q)$, где p — простое число.

Группа G содержит диэдральную подгруппу $L \cong D_{2(q-1)}$, которая максимальна в G. Кроме того, согласно [10] L не является сомножителем ни в одной факторизации группы G. Поэтому ввиду леммы 2 число $|F|$ делит $|L|$.

Группа G содержит также максимальную диэдральную подгруппу $S \cong D_{2(q+1)}$. Так как подгруппа F наследственно G-перестановочна в G, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что G имеет подгруппу FS. Согласно [10] $FS \neq G$. Отсюда и из максимальности S в G следует, что $F \subseteq S$, а значит, $|F|$ делит $|S|$. Поскольку $(q-1, q+1) = 1$, то $|F| = 2$.

Отметим, что в G все инволюции сопряжены. Поэтому можно считать, что подгруппа F содержится в подгруппе Бореля $B \cong q : (q-1)$ группы G. Подгруппа B является группой Фробениуса и ее циклическое дополнение D порядка $q-1$ самоцентрализуемо. С другой стороны, в группе B имеется подгруппа FD. Очевидно, что $FD = F \times D$, т. е. $C_B(D) \neq D$. Последнее невозможно.

2. $G \cong PSL_2(3^p) = PSL_2(q)$, где p — простое число, большее 3.

Так как группа G содержит диэдральную подгруппу $L \cong D_{q-1}$, которая максимальна в G и ввиду [10] не является сомножителем ни в одной факторизации группы G, то по лемме 2 число $|F|$ делит $|L|$.

Кроме того, группа G содержит максимальную диэдральную подгруппу $S \cong D_{q+1}$. Подгруппа F наследственно G-перестановочна в G, поэтому можно считать, что группа G имеет подгруппу FS. Согласно [10] $FS \neq G$. Отсюда и из максимальности S в G следует, что $F \subseteq S$, а значит, $|F|$ делит $|S|$. Так как $(q-1, q+1) = 1$, то $|F| = 2$.

Поскольку группа G содержит подгруппу $H \cong A_4$ и все инволюции в G сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что F содержится в подгруппе H. В соответствии с условиями леммы H должна содержать подгруппу порядка 6, что невозможно.

3. $G \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.

Отметим, что в группе $PSL_2(p)$ могут существовать подгруппа, изоморфная A_4, и подгруппа, изоморфная S_4. Поэтому диэдральная подгруппа порядка $p-1$ может быть не максимальной в $PSL_2(p)$. Группа S_4 содержит диэдр максимального порядка 8. Следовательно, $p-1 > 8$ и $p > 9$. Так как $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, то при $p \geq 13$ диэдр порядка $p-1$ максимален в G. Далее дословное повторение рассуждений предыдущего пункта приводит к противоречию.

Осталось рассмотреть случай $G \cong PSL_2(7)$. Группа G содержит три класса сопряженных максимальных подгрупп. Их представителями являются подгруппы $H_1 \cong S_4$, $H_2 \cong S_4$ и $H_3 \cong 7:3$. Ясно, что F содержится в одной из подгрупп H_1, H_2, H_3.

Пусть сначала $F \subseteq H_3$. Если $F = H_3$, то в группе G существует подгруппа порядка 42, что невозможно. Если $F \cong Z_7$, то в группе G существует подгруппа порядка 14, что также невозможно. Таким образом, $F \cong Z_3$ и F является силовской 3-подгруппой группы G. Так как силовские подгруппы сопряжены, то можно считать, что $F \subseteq H_1$. Группа H_1 содержит циклическую подгруппу $Z \cong Z_4$, поэтому ввиду условия леммы H_1 содержит подгруппу FZ^h для некоторого элемента $h \in H_1$. Очевидно, таких подгрупп в H_1 нет.

Предположим, что $F \subseteq H_1$. Если $F = H_1$, то согласно условиям леммы справедливо равенство $G = H_1 H_2^g$ для некоторого элемента $g \in G$, что невозможно. Собственные подгруппы группы S_4 принадлежат списку

$$\{Z_2, Z_3, Z_2 \times Z_2, Z_3 : Z_2, D_8, A_4\}.$$

Понятно, что F должна быть изоморфна одной из этих подгрупп. Случай $F \cong Z_3$ был рассмотрен выше. В остальных случаях по условию в группе G существует подгруппа FS, где $S \in Syl_7(G)$. Так как силовская 7-подгруппа группы G содержится в единственной максимальной подгруппе H_3, то указанных подгрупп FS в группе G не существует. Снова пришли к противоречию.

4. $G \cong PSL_3(3)$.

Из [11] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $L \cong S_4$. Ясно, что данная подгруппа не является сомножителем ни в одной факторизации группы G. Поэтому по лемме 2 имеем, что $|F|$ делит 24. Из [11] также следует, что G содержит максимальную подгруппу $T \cong 13:3$. Тогда по условию леммы не нарушая общности рассуждений, можно считать, что в G существует подгруппа FT. Отсюда следует, что $|F| = 3$. Поэтому $F \subseteq L$ и F является силовской 3-подгруппой в L. Тогда ввиду условия леммы в L найдется подгруппа R, которая содержит F и изоморфна A_4. Последнее невозможно.

5. $G \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $2n+1 \geq 3$.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — представители всех классов сопряженных максимальных подгрупп группы G. Тогда из [12] следует, что

$$(|M_1|, |M_1|, \ldots, |M_k|) = 2.$$

Поскольку группа G не имеет факторизаций двумя собственными подгруппами, то ввиду леммы 2 подгруппа F имеет порядок 2. Кроме того, как следует из [12], группа G содержит максимальную подгруппу M, являющуюся группой Фробениуса порядка $q^2(q-1)$. Пусть $M = R : S$, где R — ядро группы Фробениуса, а S — циклическое дополнение. Так как R — силовская 2-подгруппа группы G, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $F \subseteq R \subseteq M$. Таким образом, F — наследственно M-перестановочная подгруппа в M. Тогда, по определению, в M найдется элемент y такой, что $F^yS = SF^y$. Следовательно, в M существует подгруппа $L = F^y : S$. Так как $|L : S| = 2$, то $L = F^y \times S$ и $C_R(S) \neq 1$. Отсюда вытекает, что M не является группой Фробениуса. Снова пришли к противоречию.

Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 1 мы будем опираться на следующий хорошо известный факт.

Лемма 4. *Пусть p и q — простые числа, m и n — натуральные числа, причем $p^m = q^n+1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $q = 2$, $p = 3$, $n = 3$ *и* $m = 2$;

2) $q = 2$, $m = 1$, *n является степенью числа 2, а $p = q^n + 1$ — простое число Ферма*;

3) $p = 2$, $n = 1$ *и $q = p^m-1$ — простое число Мерсенна, в частности m является простым числом.* □

Минимальная несверхразрешимая группа — эта группа, у которой все собственные подгруппы сверхразрешимы, но сама она сверхразрешимой не является. В виде лемм приведем наиболее важные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

Лемма 5. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

2) *$G^{\mathfrak{U}}$ — силовская p-подгруппа группы G для некоторого простого p.*

Доказательство вытекает из леммы C и теоремы 1 работы [13]. □

Лемма 6. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда*

1) *$G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — главный фактор группы G;*

2) *$|G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})| = p^n$, где $n > 1$;*

3) *$\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = G^{\mathfrak{U}} \cap \Phi(G)$;*

4) *если группа $G^{\mathfrak{U}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p*;

5) *если группа $G^{\mathfrak{U}}$ абелева, то она элементарна*;

6) *если $p > 2$, то группа $G^{\mathfrak{U}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathfrak{U}}$ не превышает 4.*

Доказательство вытекает из леммы 5.9 и теоремы 24.2 книги [14]. □

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — минимальный контрпример к теореме 1. Тогда на основании списка Томпсона минимальных простых групп из леммы 3 выводим, что группа G не является простой неабелевой группой.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $|N| < |G|$, то из минимальности контрпримера следует, что N — разрешимая группа. Значит, N — абелева p-группа для некоторого $p \in \pi(G)$.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда из $|M| < |G|$ и выбора группы G вытекает, что M — разрешимая группа. Если N не содержится в M, то $G = NM$ — разрешимая группа. Противоречие. Поэтому $N \subseteq M$ для любой максимальной подгруппы M группы G, т. е. имеем, что $N \subseteq \Phi(G)$.

Рассмотрим композиционную цепь

$$N = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = G.$$

Тогда из $|A_{k-1}| < |G|$ и выбора группы G следует, что A_{k-1} — разрешимая группа и G/A_{k-1} — минимальная простая группа. Отсюда, $G/S(G)$ — минимальная простая группа. Если $S(G)$ не содержится в $\Phi(G)$, то в G найдется максимальная подгруппа M, которая не содержит $S(G)$. Тогда из разрешимости M имеем, что $G = S(G)M$ — разрешимая группа. Противоречие.

Поэтому полагаем далее, что $S(G) = \Phi(G)$, а значит, $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа.

Пусть $r \in \pi(G)$ и $r \notin \pi(\Phi(G))$. Тогда по лемме 1 фактор-группа $G/\Phi(G)$ обладает собственной наследственно $G/\Phi(G)$-перестановочной подгруппой $H\Phi(G)/\Phi(G) \cong Z_r$. Последнее невозможно в силу леммы 3. Поэтому $\pi(G) = \pi(\Phi(G))$. Точно так же показывается, что все элементы группы G простого порядка содержатся в подгруппе $\Phi(G)$.

Учитывая, что $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа, проанализируем пять возможных случаев из списка Томпсона.

С л у ч а й 1. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число.

Из теоремы Диксона следует, что в группе $PSL_2(2^p) = PSL_2(q)$ силовская 2-подгруппа U содержится в единственной максимальной подгруппе $B \cong q : (q-1)$. Кроме того, $PSL_2(q)$ содержит циклическую подгруппу $T \cong q+1$. При этом числа q, $q-1$, $q+1$ являются попарно взаимно простыми. Согласно лемме 4 равенство $2^p+1 = 3^m$ справедливо только в случае $p = 3$ и $m = 2$ для группы $PSL_2(2^3)$. В оставшихся случаях имеется простой делитель s числа $q+1$, отличный от 3. Пусть $S \in Syl_s(PSL_2(2^p))$. В силу изложенного получаем $\langle U, S\rangle = PSL_2(2^p)$.

Пусть сначала $p \neq 3$. Рассмотрим число $r = 3$ и элемент $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 3$. Тогда ввиду условия теоремы для некоторых подгрупп $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_s(G)$, где $s \in \pi(2^p+1) \setminus \{3\}$, существуют подгруппы $\langle x\rangle S$ и $\langle x\rangle U$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна, то подгруппа $R \in Syl_3(\Phi(G))$ нормальна в G. Отсюда следует, что $\langle x\rangle S \cap R = \langle x\rangle U \cap R = \langle x\rangle$. Поэтому $\langle x\rangle S = \langle x\rangle : S$ и $\langle x\rangle U = \langle x\rangle : U$. Если $\langle S, U\rangle$ — собственная подгруппа группы G, то $\langle S, U\rangle$ является разрешимой группой. Тогда группа $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$ содержит собственную разрешимую подгруппу

$$\langle U\Phi(G)/\Phi(G), S\Phi(G)/\Phi(G)\rangle,$$

где $U\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_2(G/\Phi(G))$ и $S\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_s(G/\Phi(G))$. Последнее невозможно ввиду строения группы $PSL_2(2^p)$.

Таким образом, $\langle S, U\rangle = G$ и подгруппа $\langle x\rangle$ нормальна в G. Следовательно, для любого элемента $z \in G$ порядка 3 подгруппа $\langle z\rangle$ нормальна в G. Ясно, что $\langle z\rangle \subseteq Z(R_1)$, где $R_1 \in Syl_3(G)$. Отсюда вытекает, что $\Phi(G)R_1 \subseteq C_G(\langle z\rangle)$. Поэтому из $R \subset R_1$ имеем, что $\Phi(G) \subset C_G(\langle z\rangle)$. Так как подгруппа $C_G(\langle z\rangle)$ является нормальной в G, то $C_G(\langle z\rangle) = G$ и $z \in Z(G)$. Поскольку z — произвольный элемент порядка 3, то все элементы группы G, имеющие порядок 3, содержатся в $Z(G)$. Согласно теореме IV.5.5 из [5] группа G 3-нильпотентна, что невозможно.

Пусть теперь $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$. Отметим, что в группе $PSL_2(8)$ порядка $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ силовская 2-подгруппа S и силовская 3-подгруппа T порождают $PSL_2(8)$. Далее, рассмотрев элемент $x \in \Phi(G)$ порядка $r = 7$, придем к противоречию по аналогии с описанным выше случаем.

Все оставшиеся случаи рассматриваются по аналогии со случаем 1, поэтому мы укажем только две силовские подгруппы группы G, которые ее порождают, а также порядок r элемента $x \in \Phi(G)$.

С л у ч а й 2. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3.

Группа $PSL_2(3^p) = PSL_2(q)$ имеет силовскую 3-подгруппу U, которая содержится в единственной максимальной подгруппе $B \cong q : ((q-1)/2)$. Так как в B подгруппа порядка $(q-1)/2$

является циклической, то она не содержит силовскую 2-подгруппу S группы G. Поэтому $\langle U, S\rangle = PSL_2(q)$. Следовательно, в группе G силовская 2-подгруппа и силовская 3-подгруппа порождают G. Теперь в качестве r достаточно взять любое число из $\pi(G) \setminus \{2, 3\}$.

С л у ч а й 3. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.

Так же, как и в случае 2, показывается, что подгруппы $U \in Syl_p(G)$ и $S \in Syl_2(G)$ порождают G. Теперь в качестве r достаточно взять любое число из $\pi(G) \setminus \{2, p\}$.

С л у ч а й 4. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$.

Из [11] следует, что подгруппы $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_7(G)$ порождают G. В этом случае $r = 3$.

С л у ч а й 5. Пусть $G/\Phi(G) \cong Sz(q)$, где $q = 2^p$ и p — простое нечетное число.

Пусть $U \in Syl_2(Sz(q))$. Число 5 делит $q^2 + 1$, и в группе $Sz(q)$ имеются два максимальных тора, T_1 и T_2, взаимно простых порядков $q+\sqrt{2q}+1$ и $q-\sqrt{2q}+1$ соответственно (см., например, [15]). Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $(|T_1|, 5) = 1$. Пусть $s \in \pi(T_1)$ и $S \in Syl_s(Sz(q))$. Тогда, как следует из [12], $\langle S, U\rangle = Sz(q)$. Поэтому в группе G силовская 2-подгруппа и силовская s-подгруппа порождают G. В качестве r следует взять число 5.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна, и пусть M — ее произвольная максимальная подгруппа. Тогда из $|M| < |G|$ и выбора группы G следует, что M — сверхразрешимая группа. Так как группа G не сверхразрешима, то G — минимальная несверхразрешимая группа.

Ввиду леммы 5 сверхразрешимый корадикал $G^{\mathfrak{U}}$ группы G является силовской p-подгруппой в G. При этом по лемме 6 $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — главный фактор группы G, $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = G^{\mathfrak{U}} \cap \Phi(G)$ и $|G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})| = p^n$, где $n > 1$. Кроме того, из условия теоремы следует, что $p > 2$, а значит, ввиду леммы 6 группа $G^{\mathfrak{U}}$ имеет экспоненту p. Отсюда, в частности, получаем, что найдется по крайней мере один элемент $x \in G^{\mathfrak{U}}$, который не лежит в $\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ и имеет порядок p.

Рассмотрим подгруппу $\langle x\rangle\Phi(G^{\mathfrak{U}})/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ группы $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$. По лемме 1 эта подгруппа является наследственно $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$-перестановочной. Пусть $M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$, не содержащая $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$. Так как группа $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ разрешима и $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — ее минимальная нормальная подгруппа, то из максимальности $M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ в $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ следует, что

$$G/\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = (M/\Phi(G^{\mathfrak{U}}))(G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \ \text{ и } \ (M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \cap (G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) = 1.$$

Так как подгруппа $\langle x\rangle\Phi(G^{\mathfrak{U}})/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ является наследственно $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$-перестановочной, то в G найдется элемент y такой, что $\langle x\rangle M^y = M^y\langle x\rangle$. А поскольку

$$(M^y/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \cap (G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) = 1 \ \text{ и } \ \langle x\rangle\Phi(G^{\mathfrak{U}})/\Phi(G^{\mathfrak{U}}) \subseteq G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}}),$$

то из максимальности M в G вытекает, что $M\langle x\rangle = G$, а значит, $|G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

4. Следствия и открытые вопросы

Приведем некоторые следствия теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Если все минимальные подгруппы группы G наследственно G-перестановочны, то G разрешима и обладает сверхразрешимой холловой $2'$-подгруппой.*

Следствие 2. *Если все минимальные подгруппы группы G нормальны, то G разрешима и обладает сверхразрешимой холловой $2'$-подгруппой.*

Следствие 3. *Если все минимальные подгруппы группы G перестановочны, то G разрешима и обладает сверхразрешимой холловой $2'$-подгруппой.*

Существуют простые неабелевы группы G с собственной G-перестановочной подгруппой. Например, согласно [9] если $G \in \{A_5, J_1\}$, то все подгруппы группы G порядка 2 являются G-перестановочными (но не являются наследственно G-перестановочными). В связи с этим кажутся естественными следующие вопросы.

Проблема 1. Будет ли группа G разрешимой, если все ее минимальные подгруппы G-перестановочны?

Проблема 2. Будет ли группа G нечетного порядка сверхразрешимой, если все ее минимальные подгруппы G-перестановочны?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.** X-quasinormal subgroups // Sib. Math. J. 2007. Vol. 48. P. 593–605. doi: 10.1007/S11202-007-0061-x
2. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
3. **Ore O.** Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. Vol. 5. P. 431–460. doi: 10.1215/S0012-7094-39-00537-5
4. **Itô N., Szép J.** Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. Vol. 23, no. 1–2. P. 168–170.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
6. **Buckley J.** Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Vol. 116. P. 15–17.
7. **Al-Shomrani M.M., Ramadan M., Heliel A.A.** Finite groups whose minimal subgroups are weakly H-subgroups // Acta Math. Sci. 2012. Vol. 32, no. 6. P. 2295–2301. doi: 10.1016/S0252-96(02)60179-9
8. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6
9. **Galt A.A., Tyutyanov V.N.** On the existence of G-permutable subgroups in simple sporadic groups // Sib. Math. J. 2022. Vol. 63, no. 4. P. 691–698. doi: 10.1134/S0037446622040097
10. **Ito N.** On the factorizations of the linear fractional groups $LF(2, p^n)$ // Acta Scient. Math. 1953. Vol. 15. P. 79–84.
11. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985. 252 p. doi: 10.1017/S001309150002839X
12. **Suzuki M.** On a class double transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145. doi: 10.2307/1970432
13. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Vol. 91. P. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426
14. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978. 271 p.
15. **Kantor W.M., Seress A.** Prime power graphs for groups of Lie type // J. Algebra. 2002. Vol. 247. P. 370–343. doi: 10.1006/j.algebra.2001.9016

Поступила 25.09.2022
После доработки 18.11.2022
Принята к публикации 21.11.2022

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Гомель, Беларусь
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”
Гомель, Беларусь
e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. Guo W., Shum K.P., Skiba A.N. X-quasinormal subgroups. *Sib. Math. J.,* 2007, vol. 48, no. 4, pp. 593–605. doi: 10.1007/S11202-007-0061-x
2. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin, NY, Walter de Gruyter, 1992, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
3. Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order. *Duke Math. J.,* 1939, vol. 5, no. 2, pp. 431–460. doi: 10.1215/S0012-7094-39-00537-5
4. Itô N., Szép J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. *Acta Sci. Math.,* 1962, vol. 23, no. 1–2, pp. 168–170.
5. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967, 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
6. Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal. *Math. Z.,* 1970, vol. 116, no. 1, pp. 15–17. doi: 10.1007/BF01110184
7. Al-Shomrani M.M., Ramadan M., Heliel A.A. Finite groups whose minimal subgroups are weakly H-subgroups. *Acta Math. Sci.,* 2012, vol. 32, no. 6, pp. 2295–2301. doi: 10.1016/S0252-96(02)60179-9
8. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 1968, vol. 74, no. 3, pp. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6
9. Galt A.A., Tyutyanov V.N. On the existence of G-permutable subgroups in simple sporadic groups. *Sib. Math. J.,* 2022, vol. 63, no. 4, pp. 691–698. doi: 10.1134/S0037446622040097
10. Itô N. On the factorizations of the linear fractional groups $LF(2, p^n)$. *Acta Sci. Math.,* 1954, vol. 15, pp. 79–84.
11. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Oxford Univ. Press, 1985, 252 p. doi: 10.1017/S001309150002839X
12. Suzuki M. On a class double transitive groups. *Ann. Math.,* 1962, vol. 75, no 1, pp. 105–145. doi: 10.2307/1970423
13. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen. *Math. Z.,* 1966, vol. 91, no. 3, pp. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426
14. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moskow, Nauka Publ., 1978, 271 p.
15. Kantor W.M., Seress Á. Prime power graphs for groups of Lie type. *J. Algebra,* 2002, vol. 247, no. 2, pp. 370–434. doi: 10.1006/j.algebra.2001.9016

Received September 25, 2022
Revised November 18, 2022
Accepted November 21, 2022

Funding Agency: The work was supported by Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research and the Russian Science Foundation (project F23RNF-237).

Sergei Fedorovich Kamornikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., F. Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru .

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University “MITSO”, Gomel, 246029 Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com .

Cite this article as: S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. Finite groups with hereditarily G-permutable minimal subgroups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 102–110 .