ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 430, № 5, с. 592–595

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ЛЮБАЯ РАЗРЕШИМО НАСЫЩЕННАЯ НАСЛЕДСТВЕННАЯ РЕШЕТОЧНАЯ ФОРМАЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ НАСЫЩЕННОЙ

© 2010 г. С. Ф. Каморников

Представлено академиком Ю.Л. Ершовым 25.08.2009 г.

Поступило 01.09.2009 г.

1. В 1939 г. Виландт установил [1], что в любой конечной группе множество всех субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. В развитие этого результата, исходя из того, что понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы является естественным обобщением понятия субнормальной подгруппы, в 1978 г. Л.А. Шеметков в [2] сформулировал следующий вопрос: в каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G образует решетку?

Назовем формацию конечных групп $\mathfrak{F}$ решеточной формацией, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе. В такой терминологии вопрос Л.А. Шеметкова может быть переформулирован в виде следующей общей задачи.

П р о б л е м а А. Найти все решеточные формации.

Эта задача вошла в “Коуровскую тетрадь” [3] (для насыщенных формаций) и обзор [4] (для наследственных насыщенных формаций).

В [5] были перечислены все наследственные насыщенные решеточные формации. Описание разрешимых наследственных насыщенных решеточных формаций было получено в [6]. Результаты работ [5, 6] отражены также в книге [7].

После работ [5, 6] проблема А была модифицирована Л.А. Шеметковым в следующем виде.

П р о б л е м а А*. Найти все ненасыщенные наследственные решеточные формации.

В классе разрешимых групп проблема А* получила полное решение в [8]. В настоящей работе она решается в универсуме всех конечных групп для разрешимо насыщенных наследственных формаций. В основе решения лежит отрицательный ответ на следующий вопрос 15.38 из “Коуровской тетради” [3]: существует ли ненасыщенная наследственная разрешимо насыщенная решеточная формация?

В качестве следствия получаем, что в классе разрешимо насыщенных наследственных формаций новых решеточных формаций, отличных от тех, что описаны в [5], нет.

2. П р е д в а р и т е л ь н ы е р е з у л ь т а т ы. Все рассматриваемые в данной работе группы предполагаются конечными; нами используются определения и обозначения, принятые в [9, 10]. Приведем лишь основные из них.

Напомним, что формация – это класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. В одной из неопубликованных работ Бэра (см. [10]) понятие насыщенной формации получило следующее развитие. Формация групп $\mathfrak{F}$ называется разрешимо насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, обладающая такой разрешимой нормальной подгруппой N, что $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$. Очевидно, каждая насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является разрешимо насыщенной. Обратное неверно. Более того, существует континуум разрешимо насыщенных формаций, которые не являются насыщенными.

Согласно теореме Бэра [10], непустая формация $\mathfrak{F}$ разрешимо насыщена тогда и только тогда, когда она является композиционной. Идея композиционной формации впервые изложена Л. А. Шеметковым в обзорном докладе [11]. Суть идеи состоит в рассмотрении класса групп, на главных факторах которых индуцированы специальные группы автоморфизмов. Формула композиционной формации приведена в работе [12].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Если G – группа, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

О п р е д е л е н и е. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-с у б н о р м а л ь н о й, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H,$$

Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений, Беларусь

такая что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, ..., n$. Множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G обозначим через $\mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство следующих лемм осуществляется простой проверкой. Напомним только, что непустая формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H группы G.

Л е м м а 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$*;

2) *если $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H \cap K \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(K)$ для любой подгруппы K группы G*;

3) *если $H_1, H_2 \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H_1 \cap H_2 \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$*;

4) *если $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(K)$ и $K \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$*.

Л е м м а 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Пусть H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда:*

1) *если $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $HN \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $HN/N \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G/N)$*;

2) *если $N \subseteq H$, то $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$ тогда и только тогда, когда $H/N \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G/N)$*.

Пусть $\mathfrak{S}$ – формация всех разрешимых групп, а $\mathfrak{G}_\pi$ – формация всех π-групп (π – некоторое множество простых чисел).

Л е м м а 3 (см. лемму 3.1.8 в [9]) . *Пусть $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}_\pi\}$. Тогда справедливо следующее утверждение*: *если $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}$*.

Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times H_2 \times ... \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, ..., t$.

Нам понадобится следующее описание разрешимых наследственных насыщенных решеточных формаций (см. [5, 6]).

Л е м м а 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является решеточной*, *когда существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества*, *что* $\mathfrak{F} = D_0\Big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\Big)$.

Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$.

3. В с п о м о г а т е л ь н ы е л е м м ы. В этом разделе через $\mathfrak{F}$ всегда будем обозначать разрешимо насыщенную решеточную наследственную формацию.

Л е м м а 5. *Если $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}_\pi\}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеточной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H_1, H_2 – это $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$-субнормальные подгруппы группы G. Тогда, в частности, подгруппы H_1 и H_2 $\mathfrak{H}$-субнормальны в G. Поэтому на основании леммы 3 $G^{\mathfrak{H}} \subseteq H_1$ и $G^{\mathfrak{H}} \subseteq H_2$. Ввиду леммы 2 $H_1/G^{\mathfrak{H}} \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}}(G/G^{\mathfrak{H}})$ и $H_2/G^{\mathfrak{H}} \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}}(G/G^{\mathfrak{H}})$. Отсюда следует, что подгруппы $H_1/G^{\mathfrak{H}}$ и $H_2/G^{\mathfrak{H}}$ являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в $G/G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является решеточной, то $(H_1 \cap H_2)/G^{\mathfrak{H}}$ и $\langle H_1, H_2\rangle/G^{\mathfrak{H}}$ суть $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы $G/G^{\mathfrak{H}}$. А поскольку $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, то подгруппы $(H_1 \cap H_2)/G^{\mathfrak{H}}$ и $\langle H_1,H_2\rangle/G^{\mathfrak{H}}$ являются $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$-субнормальными в $G/G^{\mathfrak{H}}$. Ввиду леммы 2 имеем, что $H_1 \cap H_2 \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}}(G)$ и $\langle H_1,H_2\rangle \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}}(G)$. Таким образом, формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеточной. Лемма доказана.

Л е м м а 6. $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = D_0\Big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\Big)$, *где* $\bigcup_{i \in I}\pi_i = \pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})$ *и* $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ *для всех* $k \neq l$ *из* I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является разрешимо насыщенной. А поскольку она разрешима, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является насыщенной формацией. Из наследственности формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}$ следует, что наследственна и формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Кроме того, ввиду леммы 5 формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является решеточной. Отсюда, на основании леммы 4, существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = D_0\Big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\Big)$. Лемма доказана.

Л е м м а 7. *Пусть* $\mathfrak{F}_{\pi_1} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi_1}$. *Тогда* $\mathfrak{F}_{\pi_i} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\pi_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\mathfrak{F}_{\pi_1} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_1}$ очевидно. Ввиду леммы 6 $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = D_0\Big(\mathfrak{S}_{\pi_1} \cup D_0\Big(\bigcup_{j \in J}\mathfrak{S}_{\pi_j}\Big)\Big)$, где $J = I\setminus\{1\}$. Поэтому $\mathfrak{S}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Теперь $\mathfrak{S}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_1} \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{F}_{\pi_1} \cap \mathfrak{S}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_{\pi_1} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\pi_1}$. Лемма доказана.

Л е м м а 8. *Формация $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ представима в виде* $\mathfrak{F}_{\pi_1} = \mathfrak{S}_{\pi_1}\mathfrak{F}_{\pi_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\mathfrak{F}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_1}\mathfrak{F}_{\pi_1}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{F}_{\pi_1} \subset \mathfrak{S}_{\pi_1}\mathfrak{F}_{\pi_1}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{S}_{\pi_1}\mathfrak{F}_{\pi_1} \setminus \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Поскольку $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ – формация, то G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N. При этом N есть p-группа для некоторого простого p из π_1 и N есть $\mathfrak{F}_{\pi_1}$-корадикал группы G. Пусть N – дополняемая минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда существует максимальная подгруппа M группы G, такая что $G = [N]M$. Пусть H – примарная подгруппа группы G. Тогда из $HN \in \mathfrak{S}_{\pi_1}$ на основании лемм 1 и 7 получаем, что $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{S}_{\pi_1}}(HN) \subseteq \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(HN)$. Так как формация $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ наследственна и $G/N \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$, то ввиду леммы 2 имеем $HN/N \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(G/N)$ и $HN \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(G)$. Применяя лемму 1, получаем, что $H \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(G)$. Итак, любая примарная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}_{\pi_1}$-субнормальной в G. Но M порождается всеми своими примарными подгруппами. Кроме того, ввиду леммы 5 формация $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ является решеточной. Поэтому M есть $\mathfrak{F}_{\pi_1}$-нормальная максимальная подгруппа группы G. Следовательно, $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Если $\mathrm{Core}_G(M) \neq 1$, то G имеет по крайней мере две различные минимальные нормальные подгруппы, что противоречит выбору группы G. Значит, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Но тогда $G \cong G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Пришли к противоречию.

2. Пусть $N \subseteq \Phi(G)$. Если G – это p-группа, то ввиду леммы 7 $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{F}_{\pi_1}$, где $\mathfrak{N}_p$ – формация всех p-групп. Пришли к противоречию. Значит, найдется простое число q, отличное от p, такое что $q \in \pi(G)$. При этом ввиду выбора группы G справедливо равенство $O_q(G) = 1$. На основании следствия B, 10.7, из [10], существует точный и неприводимый F_qG-модуль V. Рассмотрим группу $D = [V]G$ и ее примарную подгруппу R. Очевидно, VNR – разрешимая π_1-группа. Поэтому на основании лемм 1 и 7 имеем $R \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{S}_{\pi_1}}(VNR) \subseteq \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(VNR)$. Кроме того,

$$D/VN = VG/VN \cong G/G \cap VN \cong G/N \in \mathfrak{F}_{\pi_1}.$$

Следовательно, ввиду леммы 1 получаем $VNR/VN \in \mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(D/VN)$, а на основании леммы 2 подгруппа VNR принадлежит $\mathrm{sub}_{\mathfrak{F}_{\pi_1}}(D)$. Значит, ввиду леммы 1 подгруппа R является $\mathfrak{F}_{\pi_1}$-субнормальной в D. Итак, любая примарная подгруппа группы D будет $\mathfrak{F}_{\pi_1}$-субнормальной в D. Отсюда на основании леммы 5 группа G является $\mathfrak{F}_{\pi_1}$-нормальной максимальной подгруппой группы D, а значит, $D/\mathrm{Core}_D(G) \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Однако V – точный F_qG-модуль. Поэтому $\mathrm{Core}_D(G) = 1$ и $D \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Поскольку $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ – наследственная формация, то $G \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Л е м м а 9. *$\mathfrak{F}_{\pi_1}$ является насыщенной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Тогда, очевидно, $\Phi(G)$ – разрешимая π_1-группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_{\pi_1}\mathfrak{F}_{\pi_1}$. Но ввиду леммы 8 имеет место равенство $\mathfrak{S}_{\pi_1}\mathfrak{F}_{\pi_1} = \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{\pi_1}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ является насыщенной. Лемма доказана.

4. О с н о в н а я т е о р е м а. Следующая теорема дает ответ на вопрос 15.38 из [3].

Т е о р е м а. *Всякая разрешимо насыщенная наследственная решеточная формация является насыщенной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная наследственная решеточная формация. Рассмотрим $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Ввиду леммы 6 справедливо равенство $\mathfrak{F}^\star = D_0\Big(\bigcup\limits_{i \in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\Big)$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для любых $k \neq l$ из I. Если $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{F}$, то насыщенность формации $\mathfrak{F}$ следует из ее разрешимости. Пусть $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}^\star$. Можно представить $\mathfrak{F}^\star$ в виде

$$\mathfrak{F}^\star = D_0\Big(\mathfrak{S}_{\pi_1} \cup D_0\Big(\bigcup_{j \in J}\mathfrak{S}_{\pi_j}\Big)\Big),$$

где $J = I\backslash\{1\}$ и $2 \in \pi_1$, $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для любых $k \neq l$ из J. Рассмотрим формацию

$$\mathfrak{X} = D_0\Big(\mathfrak{F}_{\pi_1} \cup D_0\Big(\bigcup_{j \in J}\mathfrak{S}_{\pi_j}\Big)\Big),$$

где $\mathfrak{F}_{\pi_1} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$.

Включение $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{X}$. Тогда из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что G – минимальная не $\mathfrak{X}$-группа. Поскольку ввиду леммы 9 формация $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ насыщена, то насыщенной будет и формация $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Поэтому $G^{\mathfrak{X}} = N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Предположим, что $\pi(G)$ не содержится в π_1. Если $G \in D_0(\mathfrak{G}_{\pi_1} \cup \mathfrak{G}_\sigma)$, где σ – дополнение множества π_1 в множестве всех простых чисел, то ввиду единственности в G минимальной нормальной подгруппы группы N имеем $G \in \mathfrak{G}_\sigma$. Так как $2 \in \pi_1$, то G – разрешимая группа. Поэтому из $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ ввиду леммы 6 получаем, что $G \in D_0\Big(\bigcup\limits_{j \in J}\mathfrak{S}_{\pi_j}\Big) \subseteq \mathfrak{X}$. Пришли к противоречию.

Таким образом, $G \notin D_0(\mathfrak{G}_{\pi_1} \cup \mathfrak{G}_\sigma)$. Значит, G – минимальная не $D_0(\mathfrak{G}_{\pi_1} \cup \mathfrak{G}_\sigma)$-группа. Ввиду [13] G является группой Шмидта. Тогда на основании леммы 6 имеем $G \in \mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{X}$. Пришли к противоречию.

Итак, $\pi(G) \subseteq \pi_1$. Но тогда $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi_1} = \mathfrak{F}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{X}$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$, а значит, $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная наследственная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является решеточной, когда формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) *существует такое разбиение* $\{\pi_i | i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{H})$ *на попарно непересекающиеся подмножества, что* $\mathfrak{H} = D_0\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\right)$;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ *– наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;

4) *всякая нециклическая минимальная не* $\mathfrak{M}$*-группа* G *с единичной подгруппой Фраттини является монолитической с неабелевым цоколем* $N = G^{\mathfrak{M}}$, *причем* G/N *– циклическая примарная группа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wielandt H.* // Math. Z. 1939. Bd. 45. S. 209–244.
2. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2006. 194 с.
4. *Shemetkov L.A.* // Вопросы алгебры (Гомель), 1992. В. 7. С. 3–38.
5. *Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н.* В кн.: Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
6. *Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M.D.* // J. Algebra. 1992. V. 148. P. 42–52.
7. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.* Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006. 385 p.
8. *Васильев А.Ф., Каморников С.Ф.* // Алгебра и логика. 2002. Т. 42. № 4. С. 411–428.
9. *Каморников С.Ф., Селькин М.В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорус. наука, 2003. 256 с.
10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. B.; N.Y.: Walter de Gruyter, 1992. 897 p.
11. *Шеметков Л.А.* // УМН. 1975. Т. 30. № 2. С. 179–198.
12. *Каморников С.Ф., Шеметков Л.А.* // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 5. С. 493–513.
13. *Arad Z., Chillag D.* // J. Algebra. 1984. V. 87. № 2. P. 472–482.