С. Ф. Каморников, Наследственные гиперрадикальные формации, *Матем. заметки*, 2017, том 101, выпуск 1, 77–84

DOI: 10.4213/mzm10580

Математические заметки

Том 101 выпуск 1 январь 2017

УДК 512.542

Наследственные гиперрадикальные формации

С. Ф. Каморников

В работе устанавливается, что каждая наследственная гиперрадикальная формация является насыщенной и предлагается описание всех наследственных гиперрадикальных формаций.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: конечная группа, обобщенно субнормальная подгруппа, формация, гиперрадикальная формация.

DOI: 10.4213/mzm10580

1. Введение. В [1], [2] описаны все разрешимые гиперрадикальные формации, т.е. разрешимые формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно взятия нормальных подгрупп и подгрупп, порожденных $\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами (понятие гиперрадикальной формации впервые введено в работе [1]). В данной работе предлагается описание всех наследственных гиперрадикальных формаций. Тем самым дается полное решение проблемы 7.9 из обзорной статьи [3].

Отметим, что гиперрадикальные формации играют важную роль в различных задачах теории конечных групп (см., например, [4], [5]). В частности, они используются при решении проблемы перечисления всех решеточных формаций, т.е. формаций $\mathfrak{F}$, для которых в каждой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку в решетке всех подгрупп. Кроме того, гиперрадикальные формации применяются при описании формаций, индуцирующих оператор Виландта на $\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах [6].

В основе предлагаемого описания лежит тот факт, что любая наследственная гиперрадикальная формация является насыщенной (теорема 1). Доказательство этого факта опирается на работу [7], использующую классификацию неабелевых простых групп. Завершающая часть описания наследственных гиперрадикальных формаций (теорема 2) использует главный результат работы [8], устанавливающий, что множество всех наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций совпадает с множеством всех наследственных насыщенных решеточных формаций.

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [9], [10].

2. Основные определения и предварительные результаты. Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G).

Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство следующих трех лемм осуществляется простой проверкой. Напомним только, что непустая формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной* (*нормально наследственной*), если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H (соответственно для любой нормальной подгруппы H) группы G.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*

1) *если $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$, то $HN/N \in sn_{\mathfrak{F}}(G/N)$;*
2) *если $N \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$ тогда и только тогда, когда $H/N \in sn_{\mathfrak{F}}(G/N)$.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, H – подгруппа группы G. Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Формация $\mathfrak{F}$ называется *гиперрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;
2) любая группа $G = \langle A, B\rangle$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс;
2) из $G = AB$, где $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга – это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Следующая лемма устанавливает связь между гиперадикальными формациями и формациями Фиттинга.

Лемма 3. *Любая наследственная гиперрадикальная формация является формацией Фиттинга.*

Далее всегда $\mathfrak{G}$ – класс всех групп, а $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп. Простая проверка показывает, что формация $\mathfrak{S}$ является гиперрадикальной.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{F}$ – гиперрадикальная формация, то формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является гиперрадикальной.*

Доказательство. Пусть группа G представима в виде $G = \langle A, B\rangle$, где A и B – $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})$-субнормальные $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})$-подгруппы из G. Тогда, очевидно, подгруппы A и B являются одновременно $\mathfrak{F}$-субнормальными и $\mathfrak{S}$-субнормальными в G. Поэтому из гиперрадикальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что группа G принадлежит $\mathfrak{F}$. Как отмечено выше, формация $\mathfrak{S}$ также является гиперрадикальной, а значит, $G \in \mathfrak{S}$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$, т.е. формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является гиперрадикальной. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $\mathfrak{F}$ *– наследственная гиперрадикальная формация, то* $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ *– насыщенная формация.*

Доказательство. На основании лемм 3 и 4 формация $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ является формацией Фиттинга. Так как она разрешима и наследственна, то ввиду теоремы Брайса–Косси из [11] она является насыщенной. Лемма доказана.

3. Критические группы наследственной гиперрадикальной формации. В этом разделе исследуется строение критических групп наследственной гиперадикальной формации. Напомним, что *критической группой* (или *минимальной не* $\mathfrak{F}$*-группой*) формации $\mathfrak{F}$ называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная гиперрадикальная формация и* D *– минимальная не* $\mathfrak{F}$*-группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) *группа* D *совпадает с* $\mathfrak{F}$*-корадикалом и имеет простой порядок* p;
2) D *– простая неабелева группа, причем* $D = D^{\mathfrak{F}}$;
3) D *является примитивной группой с абелевым цоколем* N*, причем* $N = D^{\mathfrak{F}}$, $(|N|, |D/N|) = 1$ *и* D/N *– циклическая группа порядка* q^n *для некоторого простого числа* q;
4) D *– примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем* N*, причем* $N = D^{\mathfrak{F}}$ *и* D/N *– циклическая группа порядка* q^n *для некоторого простого* q.

Доказательство леммы 6 проведем в несколько этапов.

1. *Группа* D *обладает единственной минимальной нормальной подгруппой* N.

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы D, то ввиду равенства $\Phi(D) = 1$ существует максимальная подгруппа M такая, что $D = MN$. Поэтому из $M \in \mathfrak{F}$ и $D/N \simeq M/M \cap N$ следует, что $D/N \in \mathfrak{F}$. Если N_1 – минимальная нормальная подгруппа группы D, отличная от N, то аналогично показывается, что $D/N_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $D \simeq D/N \cap N_1 \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $D \notin \mathfrak{F}$. Значит, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D.

2. *Подгруппа* N *является* $\mathfrak{F}$*-корадикалом группы* D.

Утверждение следует из определения группы D и того, что $D/N \in \mathfrak{F}$.

3. *Если* $D^{\mathfrak{F}} = D$*, то либо* D *– группа простого порядка* p*, либо* D *– простая неабелева группа.*

Если $D^{\mathfrak{F}} = D$, то из равенства $D^{\mathfrak{F}} = N$ следует, что D – простая группа.

4. *Если* N *– собственная подгруппа группы* D*, то* D/N *– циклическая* q*-группа.*

Предположим, что в D/N имеются две максимальные подгруппы M_1/N и M_2/N. Тогда из определения минимальной не $\mathfrak{F}$-группы и равенства $D^{\mathfrak{F}} = N$ следует ввиду лемм 1 и 2, что M_1 и M_2 – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы D. Так как формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной и $D = \langle M_1, M_2\rangle$, то $D \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $D \notin \mathfrak{F}$.

Значит, группа D/N обладает единственной максимальной подгруппой. В этом случае, очевидно, она является циклической группой порядка q^n для некоторого простого числа q.

5. *Если* D *– разрешимая группа непростого порядка, то* $(|N|, |D/N|) = 1$ *и* D/N *– циклическая* q*-группа.*

Если группа D имеет непростой порядок, то N – собственная подгруппа группы D. Из предыдущего пункта следует, что D/N является циклической q-группой для некоторого простого q и принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Если N является q-группой, то и D будет q-группой. Так как $\Phi(D) = 1$, то D – элементарная абелева группа. Поэтому из $D/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $D \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с тем, что $D \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, N является p-группой, $p \neq q$ и $(|N|, |D/N|) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная гиперрадикальная формация и G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$, то G является циклической q-группой для некоторого простого q.*

Доказательство. Предположим, что в группе $G/\Phi(G)$ имеются две максимальные подгруппы $M_1/\Phi(G)$ и $M_2/\Phi(G)$ такие, что $M = \langle M_1, M_2\rangle$. Тогда из определения минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, условия $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$ и лемм 1 и 2 следует, что M_1 и M_2 – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Так как формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$.

Значит, группа $G/\Phi(G)$ имеет единственную максимальную подгруппу, а потому является группой простого порядка q. В этом случае группа G, очевидно, является циклической q-группой. Лемма доказана.

4. Насыщенность наследственной гиперрадикальной формации. Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times \cdots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Если π – некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{X}_\pi$ – это класс всех π-групп из $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп.

Нам понадобится следующее описание разрешимых наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций из [1], [2].

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной, когда существует такое разбиение $\{\pi_i | i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.*

Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная гиперрадикальная формация. Тогда существует такое разбиение $\{\pi_i | i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$, что*

1) *$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I;*
2) *$\mathfrak{F}_{\pi_i} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для любого i из I;*
3) *$\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{F}_{\pi_i}$ для любого i из I;*
4) *формация $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ является насыщенной для любого i из I.*

Доказательство. 1) Ввиду леммы 5 формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является насыщенной. Из наследственности формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}$ следует, что наследственна и формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Кроме того, ввиду леммы 4 формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является гиперрадикальной. Отсюда на основании леммы 8 существует такое разбиение $\{\pi_i | i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.

2) Включение $\mathfrak{F}_{\pi_i} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_i}$ очевидно. Ввиду утверждения 1) справедливо равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = D_0(\mathfrak{S}_{\pi_i} \cup (D_0(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{S}_{\pi_j}))$, где $J = I \setminus \{i\}$. Поэтому $\mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_{\pi_i} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

3) Включение $\mathfrak{F}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{F}_{\pi_i}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{F}_{\pi_i} \subset \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{F}_{\pi_i}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{F}_{\pi_i} \setminus \mathfrak{F}_{\pi_i}$. Так как $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ – формация, то G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой L. При этом L – p-группа для некоторого простого p из π_i и L – $\mathfrak{F}_{\pi_i}$-корадикал группы G.

Обозначим $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{H}$. Так как группа G не принадлежит формации $\mathfrak{H}$, она содержит некоторую минимальную не $\mathfrak{H}$-группу D. На основании лемм 6 и 7 возможен один из случаев:

1) группа D совпадает с $\mathfrak{H}$-корадикалом и имеет простой порядок p;
2) $D/\Phi(D)$ – простая неабелева группа, причем $D = D^{\mathfrak{H}}$;
3) $D/\Phi(D)$ является примитивной группой с абелевым цоколем $N/\Phi(D)$, причем $N/\Phi(D) = (D/\Phi(D))^{\mathfrak{H}}$, $(|N/\Phi(D)|, |D/N|) = 1$ и D/N – циклическая группа порядка q^n для некоторого простого числа q;
4) $D/\Phi(D)$ является примитивной монолитической группой с неабелевым цоколем $N/\Phi(D)$, причем $N/\Phi(D) = (D/\Phi(D))^{\mathfrak{H}}$ и D/N – циклическая группа порядка q^n для некоторого простого числа q.
5) D – циклическая q-группа для некоторого простого q, причем $D^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(D)$.

Так как формация $\mathfrak{H}$ является наследственной, из свойств $\mathfrak{H}$-корадикала следует, что $D^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{H}} = L$, т.е. $D^{\mathfrak{H}}$ – разрешимая группа. Поэтому случаи 2) и 4) не возможны.

Пусть либо группа D совпадает с $\mathfrak{H}$-корадикалом и имеет простой порядок p, либо $D/\Phi(D)$ является примитивной группой с абелевым цоколем $N/\Phi(D)$, причем

$$N/\Phi(D) = (D/\Phi(D))^{\mathfrak{H}}, \qquad (|N/\Phi(D)|, |D/N|) = 1$$

и D/N – циклическая группа порядка q^n для некоторого простого числа q, либо D – циклическая q-группа для некоторого простого q, причем $D^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(D)$. Тогда, в частности, D – разрешимая π_i-группа.

На основании утверждения 2) имеем равенство $\mathfrak{F}_{\pi_i} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Поэтому $D \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{H}$. Пришли к противоречию с тем, что D является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

4) Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}_{\pi_i}$. Тогда, очевидно, $\Phi(G)$ – разрешимая π_i-группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{F}_{\pi_i}$. Но ввиду утверждения 3) имеет место равенство $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{F}_{\pi_i}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{\pi_i}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ является насыщенной. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы можно найти в [8].

Лемма 10. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – некоторое множество наследственных насыщенных формаций. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$ из I, то $D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i)$ является наследственной насыщенной формацией.*

Теорема 1. *Всякая наследственная гиперрадикальная формация является насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная гиперрадикальная формация. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Ввиду утверждения 1) леммы 9 справедливо равенство $\mathfrak{F}^* = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$, где $\bigcup_{i\in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I.

Если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, то на основании леммы 5 насыщенность формации $\mathfrak{F}$ следует из ее разрешимости. Пусть $\mathfrak{F}^* \neq \mathfrak{F}$.

Формацию $\mathfrak{F}^*$ можно представить в виде $\mathfrak{F}^* = D_0(\mathfrak{S}_{\pi_1} \cup (D_0(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{S}_{\pi_j})))$, где $J = I \setminus \{i\}$ и $2 \in \pi_1$, $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для любых $k \neq l$ из J. Рассмотрим формацию $\mathfrak{X} = D_0(\mathfrak{F}_{\pi_1} \cup (D_0(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{S}_{\pi_j}))$. Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$.

Включение $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$. Тогда из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что G – минимальная не $\mathfrak{X}$-группа. Так как ввиду утверждения 4) леммы 9 формация $\mathfrak{F}_{\pi_1}$ является насыщенной, ввиду леммы 10 насыщенной будет и формация $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Поэтому $G^{\mathfrak{X}} = N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Предположим, что $\pi(G)$ не содержится в π_1. Если $G \in D_0(\mathfrak{G}_{\pi_1} \cap \mathfrak{G}_\sigma)$, где σ – дополнение множества π_1 в множестве всех простых чисел, то, ввиду единственности в G минимальной нормальной подгруппы N, имеем $G \in \mathfrak{G}_\sigma$. Так как $2 \in \pi_1$, то G – разрешимая группа. Поэтому из $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ ввиду утверждения 1) леммы 9 получаем, что $G \in D_0(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{S}_{\pi_j}) \subseteq \mathfrak{X}$. Пришли к противоречию.

Таким образом, группа G не принадлежит формации $D_0(\mathfrak{G}_{\pi_1} \cap \mathfrak{G}_\sigma)$. Значит, G – минимальная не $D_0(\mathfrak{G}_{\pi_1} \cap \mathfrak{G}_\sigma)$-группа. Ввиду второго следствия из [7] группа G является группой Шмидта. Тогда на основании утверждения 1) леммы 9 имеем $G \in \mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{X}$. Пришли к противоречию.

Итак, $\pi(G)$ содержится в π_1. Но тогда $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi_1} = \mathfrak{F}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{X}$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$, а значит, ввиду леммы 10 формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной. Теорема доказана.

5. Описание наследственных гиперрадикальных формаций. Следующая теорема дает конструктивное описание наследственных гиперрадикальных формаций.

Доказательство следующих двух лемм можно найти в [8]. Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если в любой группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку.

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathfrak{F}$ является решеточной формацией*;
2) *$\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной формацией.*

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ называется *нормальным* в классе $\mathfrak{M}^2$, если любая группа G, принадлежащая классу $\mathfrak{M}^2$, обладает нормальным $\mathfrak{M}$-инъектором. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{M}$-*инъектором*, если для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $V \cap N$ является $\mathfrak{M}$-максимальной подгруппой в N.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является решеточной, когда формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;
2) *существует такое разбиение $\{\pi_i | i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$*;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ – *наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;
4) *всякая нециклическая минимальная не* $\mathfrak{M}$*-группа* G *с единичной подгруппой Фраттини является примитивной с неабелевым цоколем* $N = G^{\mathfrak{M}}$, *причем* G/N – *циклическая примарная группа.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *непустая наследственная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является гиперрадикальной, когда формация* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;
2) *существует такое разбиение* $\{\pi_i | i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{H})$ *на попарно непересекающиеся подмножества, что* $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$;
3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ – *наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;
4) *всякая нециклическая минимальная не* $\mathfrak{M}$*-группа* G *с единичной подгруппой Фраттини является примитивной с неабелевым цоколем* $N = G^{\mathfrak{M}}$, *причем* G/N – *циклическая примарная группа.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная гиперрадикальная формация. Тогда ввиду теоремы 1 $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией. Значит, на основании леммы 11 $\mathfrak{F}$ – решеточная формация. Теперь ввиду леммы 12 формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям:

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;
2) существует такое разбиение $\{\pi_i | i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$;
3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ – наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$;
4) всякая нециклическая минимальная не $\mathfrak{M}$-группа G с единичной подгруппой Фраттини является примитивной с неабелевым цоколем $N = G^{\mathfrak{M}}$, причем G/N – циклическая примарная группа.

Достаточность вытекает из лемм 11 и 12. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 2 и работы [12] следует, что множество всех наследственных решеточных формаций шире множества всех наследственных гиперрадикальных формаций. Например, формация $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп является решеточной, но не является гиперрадикальной.

Пример гиперрадикальной формации, которая не является наследственной и насыщенной, предложен автором в работе [13]. В классе насыщенных формаций вопрос открыт.

Открытый вопрос. Существуют ли насыщенные гиперрадикальные формации, которые не являются наследственными?

Замечание 2. Как указал рецензент, теорема 1 может быть доказана другим способом, опираясь на технику композиционных и разрешимо насыщенных формаций с применением основных результатов работ [14], [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Ф. Васильев, “Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп”, *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, 2004, № 6, 62–70.

[2] С. Ф. Каморников, “Разрешимые гиперрадикальные формации”, *ПФМТ*, 2013, № 4 (17), 55–58.

[3] A. F. Vasil’ev, “Lattice subgroup functors, lattice formations and their applications”, *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, 2006, № 3, 32–41.

[4] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Белорусская наука, Минск, 2003.

[5] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Math. Appl. (Springer), **584**, Springer, Dordrecht, 2006.

[6] С. Ф. Каморников, “Перестановочность подгрупп и **F**-субнормальность”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:5 (1996), 1065–1080.

[7] Z. Arad, D. Chillag, “A criterion for the existence of normal π-complements in finite groups”, *J. Algebra*, **87**:2 (1992), 472–482.

[8] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, В. Н. Семенчук, “О решетках подгрупп конечных групп”, *Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1993, 27–54.

[9] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[10] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[11] R. A. Bryce, J. Cossey, “Fitting formations of finite soluble groups”, *Math. Z.*, **127**:3 (1972), 217–223.

[12] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, “К проблеме Кегеля–Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп конечных групп”, *Алгебра и логика*, **41**:4 (2002), 411–428.

[13] С. Ф. Каморников, “Об одном примере гиперрадикальной формации”, *ПФМТ*, 2014, № 3 (20), 61–64.

[14] А. Ф. Васильев, И. Н. Халимончик, “О гиперрадикальных формациях конечных групп”, *Тр. Ин-та матем.*, **16**:1 (2008), 9–12.

[15] С. Ф. Каморников, “Любая разрешимо насыщенная наследственная решеточная формация является насыщенной”, *Докл. АН*, **430**:5 (2010), 592–595.

С. Ф. Каморников
Гомельский филиал Международного института
трудовых и социальных отношений
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступило
03.02.2014
Исправленный вариант
13.06.2016